



# Fusion de connaissances : Applications aux relevés photogrammétriques de fouilles archéologiques sous-marines

Julien Seinturier

## ► To cite this version:

Julien Seinturier. Fusion de connaissances : Applications aux relevés photogrammétriques de fouilles archéologiques sous-marines. Intelligence artificielle [cs.AI]. Université du Sud Toulon Var, 2007. Français. NNT : . tel-00838699

**HAL Id: tel-00838699**

**<https://theses.hal.science/tel-00838699>**

Submitted on 26 Jun 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Fusion de connaissances :

## Applications aux relevés photogrammétriques de fouilles archéologiques sous-marines

---

### THÈSE

*Présentée et soutenue publiquement  
le mardi 11 décembre 2007*

Pour l'obtention du titre de Docteur de l'Université du Sud Toulon Var  
(*Spécialité informatique*)

Par

Julien SEINTURIER

#### *Composition du jury :*

##### **Rapporteurs :**

Salem BENFERHAT	(Professeur, CRIL – fre CNRS 2499, Université d'Artois)
Andrea CAITI	(Professeur, ISME, Università di Pisa)

##### **Examineurs :**

Pierre DRAP	(Chargé de recherche CNRS, LSIS – umr CNRS 6168) – <b>co-directeur</b>
Frédéric GAUCH	(Marine Operations Departement Manager, COMEX SA)
Elisabeth MURISASCO	(Professeur, LSIS – umr CNRS 6168, Université du Sud Toulon Var)
Odile PAPINI	(Professeur, LSIS – umr CNRS 6168, ESIL, Université de la Méditerranée) – <b>directrice</b>

**Invité :** Frédéric ALCALA (Marine Operations Departement, COMEX SA)

Université du Sud Toulon Var, Laboratoire LSIS – umr CNRS 6168 équipe INCA  
Avenue de l'Université - BP20132  
83957 LA GARDE CEDEX - FRANCE

---

A Aude, Julie et Noa

---

## Remerciements

Je remercie très chaleureusement Salem Benferhat et Andrea Caiti pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant d'être rapporteurs de cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Je remercie également Elisabeth Murisasco, Frédéric Gauch et Frédéric Alcalá d'avoir accepté d'être membres du jury qui a examiné ce travail.

Bien qu'un travail de thèse s'étale sur une courte période, je l'ai plutôt vécu comme l'aboutissement de toute une vie étudiante. C'est pour cela que je tiens à exprimer mes sincères remerciements à tout ceux qui m'ont soutenu durant toutes ces années. Je ne serais jamais arrivé si loin sans vous.

Je tiens à dire un grand merci à Odile Papini et Pierre Drap, qui ont accepté d'encadrer mon travail et ont toujours été disponibles pour moi. Merci de m'avoir fait découvrir de nouveaux domaines, de nouveaux horizons, et merci surtout de m'avoir fait passer ce cap qu'est la thèse.

Même si Pierre et Odile ont une volonté de fer et ont tout mis en oeuvre pour que cette thèse soit réussie, elle n'aurait jamais existé sans le soutien de la Région Provence Alpes Côte d'Azur et de la Compagnie Maritime d'EXpertise (COMEX) qui ont financé ce projet. Un remerciement particulier à la COMEX et à ses équipes, notamment Gilbert Pachoud et Nicolas Vincent, pour le soutien technique sans lequel les expérimentations faisant partie intégrante de ce travail n'auraient pas vu le jour. Une partie de ce travail a également été rendue possible grâce au projet européen IST VENUS et à tous ses partenaires. Un grand merci également aux personnes avec qui j'ai eu la chance de travailler : Anne et Pascal au MAP, Mariette et Sabrina au LSIS. Au delà des personnes directement impliquées dans ce travail de thèse, je souhaite remercier tout ceux qui m'ont soutenu durant ces longues années universitaires et avant. Merci tout d'abord à Germaine, Irène, Maurice et Pierre qui ont toujours été là pour m'aider quand j'en avais besoin et qui sont certainement les plus impatients d'avoir ce manuscrit entre les mains. Merci aussi à Patricia, Pierre (décidément il y en a beaucoup dans mon entourage), Robert et Christine pour tout ce que vous avez fait pour moi.

Parmi les personnes que je souhaite associer à ce travail de thèse il y a bien sûr Anne-Laure, Franck, Guillaume, Julie, Magalie B., Magalie C. et Nasser qui ont usé les bancs de l'université avec moi et que je suis fier d'avoir comme amis. Merci d'avoir pris de mes nouvelles et de ne pas vous être fâchés quand je disparaissais sous le travail.

Un travail de thèse nécessite une grande motivation. Je salue tendrement Aude et Julie à qui je pensais souvent pour me redonner le moral. J'espère que vous êtes fières de votre grand frère. En tout cas, moi, je suis très fier de vous.

Je tiens à clore ces remerciements en citant celles qui ont été au plus près de moi durant ces dernières années. Merci Laura d'avoir partagé tout ces moments, merci d'avoir compris mon travail et d'avoir toujours su m'aider à faire les bons choix. Merci, tout simplement, d'être à côté de moi. Il est également une petite frimousse dont je souhaite parler. A toi, ma petite Noa, qui a égayé ces trois dernières années par ton rire et ton dynamisme. Peut être liras tu un jour ce travail, j'espère que tu le trouveras alors intéressant.

Je demande pardon à toutes les personnes que je n'ai pas pu citer ici, je sais qu'elles se reconnaîtront.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>I</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Logique propositionnelle, logique des prédicats et logique possibiliste</b>	<b>17</b>
2.1	Logique propositionnelle . . . . .	18
2.1.1	Le langage du calcul propositionnel . . . . .	18
2.1.2	Aspect syntaxique du calcul propositionnel . . . . .	18
2.1.3	Aspect sémantique du calcul propositionnel . . . . .	19
2.2	Logique des prédicats . . . . .	20
2.2.1	Le langage de la logique des prédicats : $\mathcal{L}_{Pr}$ . . . . .	20
2.2.2	Aspect syntaxique du calcul des prédicats . . . . .	21
2.2.3	Aspect sémantique du calcul des prédicats . . . . .	22
2.3	Logique possibiliste . . . . .	24
2.3.1	Distribution de possibilités . . . . .	24
2.3.2	Bases possibilistes . . . . .	25
2.3.3	Sous-sommation et inférence en logique possibiliste . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Formalismes conceptuels et approche Objet</b>	<b>27</b>
3.1	Concept . . . . .	28
3.2	Réseaux sémantiques . . . . .	28
3.2.1	Origines . . . . .	28
3.2.2	Cadre conceptuel (Frame) . . . . .	29
3.3	Graphes conceptuels . . . . .	30
3.3.1	Définition formelle des graphes conceptuels . . . . .	30
3.3.2	Structure de graphes conceptuels . . . . .	30
3.4	Logiques de descriptions . . . . .	30
3.4.1	Syntaxe des logiques de description . . . . .	31
3.4.2	Sémantique des logiques de description . . . . .	31
3.4.3	Base de connaissance en Logique de Description . . . . .	31
3.5	L'approche Objet . . . . .	31
3.5.1	Encapsulation . . . . .	32
3.5.2	Héritage et polymorphisme . . . . .	33
<b>II</b>	<b>Fusion de croyances dans le cadre propositionnel</b>	<b>35</b>
<b>4</b>	<b>État de l'art</b>	<b>39</b>
4.1	Introduction . . . . .	40
4.2	Fusion de croyances . . . . .	40
4.3	Fusion avec contraintes d'intégrité . . . . .	41

4.3.1	Familles d'opérateurs . . . . .	42
4.3.2	Théorème de représentation . . . . .	42
4.4	Différentes approches de la fusion . . . . .	43
4.4.1	Fusion sans priorité de bases . . . . .	43
4.4.2	Fusion avec priorités implicites . . . . .	44
4.4.3	Fusion avec priorités explicites . . . . .	47
4.5	Fusion en logique possibiliste . . . . .	48
4.5.1	Fusion de bases possibilistes . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Représentation de pré-ordres par des polynômes</b>	<b>51</b>
5.1	Rappels et notations . . . . .	52
5.2	Pré-ordres sur les polynômes . . . . .	52
5.3	Représentation de pré-ordres par des polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}_2$ . . . . .	53
5.3.1	Représentation d'un pré-ordre . . . . .	53
5.3.2	Combinaison de pré-ordres . . . . .	55
5.4	Représentation de pré-ordres par des polynômes à coefficients dans $\mathbb{W}$ . . . . .	57
5.4.1	Représentation d'un pré-ordre . . . . .	58
5.4.2	Combinaison de pré-ordres . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Représentation d'états épistémiques</b>	<b>61</b>
6.1	Introduction . . . . .	62
6.2	Représentation d'ensembles d'états épistémiques . . . . .	63
6.3	Représentation sémantique . . . . .	64
6.3.1	Ensemble de pré-ordres sur les interprétations . . . . .	65
6.3.2	Pré-ordre interne . . . . .	65
6.3.3	Pré-ordre externe . . . . .	69
6.4	Représentation syntaxique . . . . .	70
6.4.1	Ensemble de base de croyances stratifiées . . . . .	70
6.4.2	Pré-ordre interne . . . . .	71
6.4.3	Pré-ordre externe . . . . .	72
6.5	Équivalence entre représentations sémantique et syntaxique. . . . .	72
6.5.1	De la représentation syntaxique à la représentation sémantique . . . . .	73
6.5.2	De la représentation sémantique à la représentation syntaxique . . . . .	76
6.5.3	Construction d'une base de croyances stratifiée . . . . .	76
<b>7</b>	<b>Fusion d'états épistémiques</b>	<b>87</b>
7.1	Approche sémantique . . . . .	88
7.1.1	Pré-ordres externes et internes. . . . .	88
7.1.2	Calcul du poids global . . . . .	91
7.1.3	Fusion dans le cadre réversible . . . . .	94
7.1.4	Réversibilité du processus de fusion . . . . .	96
7.2	Approche Syntaxique . . . . .	98
7.2.1	Pré-ordres externes et internes . . . . .	98
7.2.2	Calcul de la base pondérée globale . . . . .	100
7.2.3	Fusion syntaxique et cadre réversible . . . . .	105
7.2.4	Réversibilité du processus de fusion . . . . .	106
7.3	Équivalence des approches . . . . .	108
<b>8</b>	<b>Generalisation de la fusion dans le cadre réversible</b>	<b>117</b>
8.1	Introduction . . . . .	118
8.2	Fusion à base de distances . . . . .	118
8.2.1	Pré-ordre interne . . . . .	118
8.2.2	Pré-ordre externe . . . . .	118
8.2.3	Distance globale et fusion . . . . .	118

8.2.4	Représentation dans le cadre réversible . . . . .	119
8.3	Révision réversible . . . . .	120
8.3.1	Approche sémantique . . . . .	120
8.3.2	Approche syntaxique . . . . .	120
<b>III</b>	<b>Fusion de connaissances dans le cadre d'Arpenteur</b>	<b>123</b>
<b>9</b>	<b>Etat de l'art</b>	<b>127</b>
9.1	La photogrammétrie . . . . .	128
9.1.1	Histoire de la photogrammétrie . . . . .	128
9.1.2	Principe de la photogrammétrie . . . . .	129
9.1.3	Relevé photogramétrique . . . . .	129
9.2	Le projet Arpenteur . . . . .	130
9.2.1	Histoire . . . . .	130
9.2.2	Mesure fondée sur la connaissance . . . . .	131
9.3	Processus de restitution . . . . .	131
9.3.1	Processus de mesure . . . . .	132
9.3.2	Restitution des objets . . . . .	133
<b>10</b>	<b>Représentation des connaissances dans le cadre d'Arpenteur</b>	<b>135</b>
10.1	Connaissances pluridisciplinaires . . . . .	136
10.2	Fondements du projet Arpenteur et premier formalisme de représentation . . . . .	137
10.3	Représenter les objets d'un domaine . . . . .	137
10.4	Taxinomie d'objets mesurables . . . . .	139
10.4.1	Notion d'item mesurable . . . . .	140
10.4.2	Taxinomie d'items mesurables . . . . .	140
10.4.3	Limite de la taxinomie et typologie . . . . .	141
10.5	Contraintes sur les objets . . . . .	141
10.5.1	Relations entre les objets et contraintes sur les relations . . . . .	142
10.6	Représentation des connaissances dans Arpenteur . . . . .	143
<b>11</b>	<b>Fusion d'objets caractérisés par des entités</b>	<b>145</b>
11.1	Cohérence et Formalisation de la connaissance . . . . .	146
11.1.1	Cohérence d'un ensemble d'objets . . . . .	146
11.1.2	Formalisation en logique des prédicats instanciés . . . . .	148
11.2	Construction des ensembles $\mathcal{E}$ -incohérents . . . . .	150
11.2.1	Méthode matricielle . . . . .	150
11.2.2	Méthode basée sur la revision de croyances . . . . .	153
11.3	Formalisation de la fusion d'ensembles d'objets . . . . .	156
11.4	Restauration de la cohérence d'un ensemble d'objets . . . . .	157
11.4.1	Fusion prudente . . . . .	157
11.4.2	Fusion avec priorité entre les objets et les ensembles d'objets . . . . .	158
11.4.3	Pré-ordre global pour les objets . . . . .	159
11.4.4	Restauration de cohérence manuelle . . . . .	162
11.4.5	Restauration de cohérence automatisée . . . . .	162
<b>IV</b>	<b>Applications</b>	<b>165</b>
<b>12</b>	<b>Ametist : an Arpenteur ManagEment Tool for Interactive Survey Treatment</b>	<b>167</b>
12.1	Introduction . . . . .	168
12.2	Interface utilisateur pour le contrôle des résultats . . . . .	168
12.2.1	Panneau de commandes . . . . .	168



12.2.2	Panneau d'aperçu des photographies . . . . .	169
12.2.3	Panneau d'informations générales . . . . .	169
12.2.4	Espace de travail . . . . .	170
12.3	Détection d'incohérences et fusion des résultats . . . . .	173
12.3.1	Outil de détection d'incohérences . . . . .	173
<b>13</b>	<b>Relevé du site de Pianosa pour le projet Venus</b>	<b>177</b>
13.1	Le projet VENUS : Virtual Exploration of Underwater Sites . . . . .	178
13.2	Description du relevé du site de Pianosa . . . . .	178
13.3	Aquisition des données . . . . .	179
13.3.1	Relevé sonar . . . . .	179
13.3.2	Relevé photogrammétrique . . . . .	179
13.4	Utilisation d'Ametist pour la gestion et le contrôle des données . . . . .	181
13.5	Résultats . . . . .	183
<b>14</b>	<b>Evaluation des ressources de corail rouge en Algérie</b>	<b>185</b>
14.1	Introduction . . . . .	186
14.2	Déroulement du projet . . . . .	186
14.3	Relevés photogrammétriques . . . . .	186
14.4	Gestion des données avec Ametist . . . . .	187
14.5	Résultats . . . . .	189
<b>15</b>	<b>Conclusion générale et développements futurs</b>	<b>191</b>
15.1	Conclusion . . . . .	191
15.1.1	Définition d'un cadre réversible pour la fusion . . . . .	191
15.1.2	Utilisation des techniques de fusion pour la construction d'un outil de gestion de relevés photogrammétriques . . . . .	192
15.1.3	Développement d'applications utilisables en conditions réelles pour la gestion de relevés photogrammétriques . . . . .	193
15.2	Développements futurs . . . . .	193

# Table des figures

1.1	La mesure basée sur la connaissance. . . . .	13
3.1	Exemple de représentation TLC de R. Quillian. . . . .	28
3.2	Reconstruction d'un concept par parcours de la hiérarchie. . . . .	29
3.3	Schéma de la fusion en logique propositionnelle. . . . .	37
3.4	Cadre réversible pour la fusion. . . . .	37
6.1	Représentation de croyances sur des sources d'information par des état épistémiques. . . . .	62
6.2	Représentation d'un ensemble de sources d'informations par un ensemble d'états épistémiques. . . . .	63
6.3	Les deux natures possibles pour un agent. . . . .	64
6.4	Représentation d'un état épistémique en logique propositionnelle. . . . .	64
6.5	Passage d'une représentation syntaxique d'un état épistémique à une représentation sémantique. . . . .	73
6.6	Passage d'une représentation sémantique d'un état épistémique à une représentation syntaxique. . . . .	76
7.1	Schéma de la fusion d'états épistémiques dans l'approche sémantique. . . . .	88
9.1	Principe de la photogrammétrie. . . . .	129
9.2	Processus de relevé photogrammétrique. . . . .	130
9.3	Fonctionnement de l'outil de mesure Arpenteur. . . . .	132
9.4	Interface utilisateur de l'outil de mesure. . . . .	132
9.5	Module de saisie spécifique aux amphores. . . . .	133
9.6	Schéma de fonctionnement du système à base de connaissance. . . . .	134
10.1	Création d'un outil de mesure fondé sur la connaissance experte.. . . .	136
10.2	Schéma général du projet PAROS . . . . .	137
10.3	Structure d'une entité dans le projet PAROS . . . . .	138
10.4	Le profil d'une amphore PY 4 [71]. . . . .	138
10.5	Expression des descriptions sous forme d'ensemble d'attributs. . . . .	139
10.6	Concept représentant une amphore. . . . .	139
10.7	Domaines de connaissance . . . . .	140
10.8	Taxinomie des objets mesurables. . . . .	141
10.9	Limite de la représentation taxinomique. . . . .	142
10.10	Le modèle conceptuel Arpenteur. . . . .	143
11.1	Matrice de vecteurs de satisfaction. . . . .	151
11.2	Construction d'un ensemble d'objets cohérent. . . . .	157
12.1	Vue générale de l'interface d'Ametist . . . . .	169
12.2	Mannequin des miniatures de photographies. . . . .	170
12.3	Panneau de visualisation des photographies. . . . .	171
12.4	Tables des points 2D / 3D . . . . .	172
12.5	Editeur d'objets affichant les attributs des objets. . . . .	172
12.6	Editeur d'objets affichant la table des faits. . . . .	173

---

12.7	Combinaison des causes d'incohérence . . . . .	174
12.8	Ametist detection report . . . . .	175
13.1	Localisation du site et de l'île de pianosa, au sud de l'île d'Elbe . . . . .	179
13.2	Relevé bathymétrique du site. En bas à gauche nous apercevons la zone de 20mx20m où se trouvent les amphores . . . . .	180
13.3	Deux photographies successives dans une bande . . . . .	180
13.4	Photographies orientées . . . . .	181
13.5	Interface de choix des photographies pour la mesure . . . . .	181
13.6	Interface de mesure des amphores . . . . .	182
13.7	Vue générale de l'interface d'Ametist . . . . .	182
13.8	Rapport de détection d'incohérences dans l'interface d'Ametist . . . . .	183
14.1	Un couple de photographie montrant un quadrat . . . . .	187
14.2	Interface de gestion des photographies . . . . .	187
14.3	Interface de mesure de colonies de corail . . . . .	188
14.4	Interface de contrôle des colonies de corail . . . . .	188
15.1	Cadre réversible et équivalence entre les approches sémantique et syntaxique . . . . .	192

# Liste des tableaux

4.1	<i>Représentation du calcul des distances locales et globales pour les opérateurs de fusion <math>\Sigma</math>, <math>WS</math>, <math>MAX</math>, <math>\mathcal{GMAX}</math></i>	46
6.1	<i>Tableau représentant le déroulement de l'algorithme de contrepartie syntaxique pour le couple <math>\xi_1</math>.</i>	85
6.2	<i>Tableau représentant le déroulement de l'algorithme de contrepartie syntaxique pour le couple <math>\xi_2</math>.</i>	85
6.3	<i>Tableau représentant le déroulement de l'algorithme de contrepartie syntaxique pour le couple <math>\xi_3</math>.</i>	85
8.1	<i>Représentation du calcul des distances locales et globales pour les opérateurs de fusion <math>\Sigma</math>, <math>WS</math>, <math>MAX</math>, <math>\mathcal{GMAX}</math></i>	119
11.1	Objets et leurs attributs.	147
11.2	Objets et leurs attributs.	149



# Chapitre 1

## Introduction

### Introduction

Ce travail de thèse se situe dans le cadre de la mesure fondée sur la connaissance. La mesure d'objets fondée sur la connaissance est la synthèse entre la connaissance conceptuelle qu'un expert ou un groupe d'experts possèdent sur leur domaine et un ensemble d'observations obtenues sur des objets de ce domaine. La restitution produit une représentation de l'objet suivant le modèle conceptuel défini et validant les observations effectuées. Comme le montre la figure 1.1, la mesure fondée sur la connaissance est un processus complexe. Il peut néan-

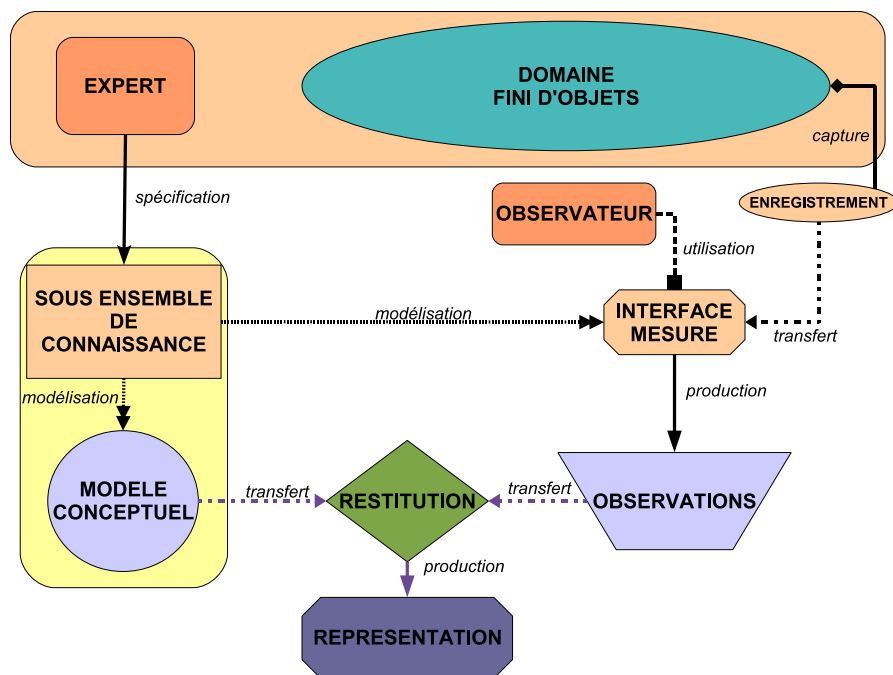


FIG. 1.1 – La mesure basée sur la connaissance.

moins être scindé en trois phases. La première est la génération d'un modèle. Durant celle-ci, une partie de la connaissance d'un expert sur certains objets de son domaine est extraite. À partir de cette connaissance, un protocole de mesure des objets est créé ainsi qu'un modèle conceptuel de ceux-ci. Bien que ce ne soit pas nécessaire dans le cas général, il est possible de monter un protocole de mesure directement à partir du modèle conceptuel. La deuxième phase est la mesure des objets du domaine. À partir d'enregistrements réalisés sur les objets, un observateur produit au moyen d'une interface de mesure intégrant la connaissance de l'expert des

---

observations sur les objets. Enfin, la dernière phase est la restitution faisant la synthèse entre observations et modèle conceptuel afin de fournir une représentation de l'objet mesuré. La restitution dépend directement de deux facteurs : le modèle conceptuel et les observations réalisées. Le but de la restitution est de produire une représentation de l'objet mesuré le plus proche de la réalité possible tout en respectant le modèle conceptuel ainsi que les observations réalisées. Cependant, dans la pratique, le processus de mesure fondée sur la connaissance est plus complexe.

La nature des sites à mesurer conduit en effet bien souvent à multiplier les sessions de mesures et à produire non pas un résultat unique mais un ensemble de résultats intermédiaires. Obtenir un résultat final ne peut pas simplement se ramener à rassembler tous les résultats intermédiaires sans prendre en compte sa cohérence. Comme dans tous les processus de mesures, l'erreur est possible même si un résultat intermédiaire est erroné, il ne doit pas entraîner l'incohérence du résultat final. La mise en place d'un outil de fusion est donc nécessaire. Cependant, cet outil de fusion intégrer la réversibilité du processus. En effet, dans le domaine de la mesure le moindre résultat est onéreux en temps et en ressources. La fusion d'un ensemble de résultat doit permettre de retrouver les résultats initiaux afin ne perdre aucune information même si elle est erronée.

## Plan de travail

L'approche que nous avons choisi pour le développement d'un outil de fusion d'un ensemble de résultats issus d'un processus de mesure est articulée autour de trois axes.

Le premier axe est l'étude de techniques de fusion existantes et le développement théorique d'un cadre de fusion réversible. En effet, la littérature fournit de nombreuses techniques de fusion dans différents formalismes [13, 53, 50, 17, 5, 23]. Nous avons choisi d'étudier la fusion dans le cadre de la logique propositionnelle car ce formalisme est très adapté pour les applications réelles du fait de sa décidabilité. Après un état de l'art sur la fusion en logique propositionnelle, nous proposons un cadre réversible pour la fusion basé sur les polynômes et permettant de retrouver les informations originelles à partir d'un ensemble d'informations fusionnées. Nous exprimons ensuite des techniques de fusion et de révision de croyances bien connues dans notre cadre.

La deuxième partie de ce travail est consacrée à l'adaptation des techniques proposées durant l'étude formelle de la fusion au niveau de la logique propositionnelle. A partir de la représentation dans le modèle Objet utilisée dans le cadre de la mesure fondée sur la connaissance [31, 32], nous proposons une nouvelle représentation reposant sur la notion d'entité et permettant d'exprimer la cohérence d'un ensemble d'objets. La détection d'incohérence au sein d'un ensemble d'objets formant le résultat d'un relevé est exprimée grâce à la représentation d'une entité en logique des prédicats. Les objets étant en nombre fini, la représentation d'une entité est alors équivalente à une représentation en logique propositionnelle. Après avoir proposé deux méthodes différentes afin de détecter les incohérences dans un ensemble d'objets, l'une matricielle, l'autre basée sur les R-ensembles, nous donnons une première méthode de fusion d'ensembles d'objets basée sur les techniques utilisées pour construire le cadre de fusion réversible.

La troisième et dernière partie de ce travail est la description de l'outil développé à partir des parties précédentes afin de permettre la gestion d'ensembles de relevés ainsi que son utilisation en conditions réelles. Cet outil est intégré à une interface, appelée Ametist, spécialement développée pour la gestion, la détection d'incohérence et la fusion d'ensembles de relevés. Les expérimentations étudiées sont le relevé du site archéologique sous-marin de Pianosa [40, 27, 68], dans le cadre du projet Européen VENUS et le relevé de plusieurs sites coralliens au large des côtes algériennes dans le cadre d'un projet d'évaluation des ressources coralliennes du littoral algérien [79].

**Première partie**

**Préliminaires**





## Chapitre 2

# Logique propositionnelle, logique des prédicats et logique possibiliste

### Contents

---

<b>2.1</b>	<b>Logique propositionnelle . . . . .</b>	<b>18</b>
2.1.1	Le langage du calcul propositionnel . . . . .	18
2.1.2	Aspect syntaxique du calcul propositionnel . . . . .	18
2.1.3	Aspect sémantique du calcul propositionnel . . . . .	19
<b>2.2</b>	<b>Logique des prédicats . . . . .</b>	<b>20</b>
2.2.1	Le langage de la logique des prédicats : $\mathcal{L}_{Pr}$ . . . . .	20
2.2.2	Aspect syntaxique du calcul des prédicats . . . . .	21
2.2.3	Aspect sémantique du calcul des prédicats . . . . .	22
<b>2.3</b>	<b>Logique possibiliste . . . . .</b>	<b>24</b>
2.3.1	Distribution de possibilités . . . . .	24
2.3.2	Bases possibilistes . . . . .	25
2.3.3	Sous-sommation et inférence en logique possibiliste . . . . .	25

---

## 2.1 Logique propositionnelle

L'objet de cette section est une présentation rapide du calcul propositionnel. Pour plus de détails les travaux [38], [24], [51], [39] peuvent être consultés.

### 2.1.1 Le langage du calcul propositionnel

Le langage propositionnel  $\mathcal{L}$  est construit à partir d'un ensemble dénombrable de variables propositionnelles  $\mathcal{P}$  (des lettres éventuellement indicées), des constantes 0 (Faux) et 1 (Vrai) et des connecteurs  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  et de parenthèses.

**Définition 1** *L'ensemble des formules bien formées de  $\mathcal{L}$  est le plus petit ensemble tel que :*

- 0 et 1 sont des formules ;
- une variable propositionnelle (ou proposition) est une formule ;
- si  $\phi$  et  $\psi$  sont des formules alors  $\neg\phi$ ,  $\phi \wedge \psi$ ,  $\phi \vee \psi$ ,  $\phi \rightarrow \psi$ ,  $\phi \leftrightarrow \psi$  sont des formules.

### 2.1.2 Aspect syntaxique du calcul propositionnel

L'aspect syntaxique du calcul propositionnel revient à définir un système formel dans lequel les déductions que l'on peut faire conduisent à des théorèmes.

Pour distinguer les théorèmes des formules bien formées on utilise le symbole d'assertion logique noté  $\vdash$  qui n'est pas un nouvel opérateur mais un signe métalogique (du métalangage).

Afin de pouvoir effectuer des déductions, des règles sont définies. La règle de substitution permet de remplacer dans un théorème une variable propositionnelle, partout où elle figure, par une autre variable propositionnelle ou par une formule bien formée. La règle de conclusion, notée Cons, souvent appelée règle de dérivation ou de modus ponens, spécifie que si  $\phi$  et  $\phi \rightarrow \psi$  sont des théorèmes alors  $\psi$  est un théorème, cela se note :

$$\frac{\vdash \phi, \vdash \phi \rightarrow \psi}{\vdash \psi}$$

Les définitions sont des équivalences qui permettent de simplifier l'écriture des formules en n'utilisant que certains connecteurs, par exemple, dans les définitions ci-dessous, seuls les connecteurs  $\neg$  et  $\vee$  sont utilisés :

- $D_1 \quad \phi \rightarrow \psi =_{def} \neg\phi \vee \psi$  ;
- $D_2 \quad \phi \wedge \psi =_{def} \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$  ;
- $D_3 \quad \phi \leftrightarrow \psi =_{def} (\neg\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \neg\psi)$ .

La définition d'un système formel, nécessite le recours à des axiomes, c'est à dire des propositions évidentes par elles-mêmes qui ne nécessitent aucune démonstration. Plusieurs choix d'ensembles d'axiomes sont possibles ; parmi les plus célèbres, Whitehead et Russell ont proposé un système de 5 axiomes, Hilbert et Ackermann un système de 4 axiomes, Kleene et Gentsen un système de 13 axiomes. Pour des raisons de simplicité, nous rappellerons le système de Lukasiewicz, datant des années 1930, n'utilisant que les connecteurs  $\neg$  et  $\rightarrow$  et basé sur les 3 axiomes suivants :

- $A_1 \quad \vdash \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$  ;
- $A_2 \quad \vdash (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow R)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow R))$  ;
- $A_3 \quad \vdash (\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$ .

Dans le système formel de Lukasiewicz, la seule règle d'inférence est le modus ponens et on a les propriétés suivantes :

**Proposition 1**  $\forall \phi \in \mathcal{L}, \vdash (\phi \rightarrow \phi)$ .

**Proposition 2**  $\forall \phi_1, \dots, \phi_{n-1}, \psi \in \mathcal{L} \times \dots \times \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ , si  $\phi_1, \dots, \phi_{n-1} \vdash (\phi_n \rightarrow \psi)$  alors  $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}, \phi_n \vdash \psi$ .

L'utilisation du théorème de déduction, ci-après, évite l'écriture d'une déduction complète de la formule considérée, ce qui serait beaucoup plus long.

**Théorème 1 (de déduction.)**  $\forall \phi_1, \dots, \phi_{n-1}, \psi \in \mathcal{L} \times \dots \times \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ , Si  $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}, \phi_n \vdash \psi$  alors  $\phi_1, \dots, \phi_{n-1} \vdash (\phi_n \rightarrow \psi)$ .

De plus, on dispose des quelques théorèmes suivants qui s'avèrent utiles :

**Proposition 3**  $\forall \phi, \psi, R \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ , toutes les formules suivantes sont des théorèmes :

- $\vdash ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow R) \rightarrow (\phi \rightarrow R)))$ ;
- $\vdash (\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi))$ ;
- $\vdash (\neg \phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi))$ ;
- $\vdash (\neg \neg \phi \rightarrow \phi)$ ;
- $\vdash (\phi \rightarrow \neg \neg \phi)$ ;
- $\vdash ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \phi))$ ;
- $\vdash (\phi \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \psi)))$ ;
- $\vdash ((\psi \rightarrow \phi) \rightarrow ((\neg \psi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi))$ .

### 2.1.3 Aspect sémantique du calcul propositionnel

L'aspect sémantique du calcul propositionnel est l'interprétation des formules de  $\mathcal{L}$  et consiste en l'analyse des formules toujours vraies, appelées tautologies.

**Définition 2** On appelle interprétation, toute application  $\sigma$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\{0, 1\}$  telle que  $\sigma(0) = 0$  et  $\sigma(1) = 1$ . L'application  $\sigma$  est étendue aux formules de la façon suivante :  $\forall P, \psi \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ ,

- $\sigma(\neg \phi) = 1 - \sigma(\phi)$ ;
- $\sigma(\phi \vee \psi) = \max(\sigma(\phi), \sigma(\psi))$ ;
- $\sigma(\phi \wedge \psi) = \min(\sigma(\phi), \sigma(\psi))$ ;
- $\sigma(\phi \rightarrow \psi) = \max((1 - \sigma(\phi)), \sigma(\psi))$ ;
- $\sigma(\phi \leftrightarrow \psi) = \min(\max((1 - \sigma(\phi)), \sigma(\psi)), \max(\sigma(\phi), (1 - \sigma(\psi))))$ .

Cela se représente souvent sous la forme d'une table de vérité :

$\phi$	$\psi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \wedge \psi$	$\phi \rightarrow \psi$	$\phi \leftrightarrow \psi$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

On dispose des définitions suivantes :

$\forall \phi, \psi \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ ,  $\mathcal{A}$  un ensemble de formules de  $\mathcal{L}$ , et  $\sigma$  une interprétation,

- On appelle tautologie (ou formule valide) toute formule  $\phi$ , telle que pour toute interprétation  $\sigma$ ,  $\sigma(\phi) = 1$ , on la note  $\models \phi$ .
- La formule  $\psi$  est une conséquence de la formule  $\phi$  si  $\sigma(\phi) = 1$  alors  $\sigma(\psi) = 1$ , on écrit alors  $\phi \models \psi$ .
- La formule  $\psi$  est une conséquence de l'ensemble de formules  $\mathcal{A}$ , si  $\forall \phi \in \mathcal{A}$ ,  $\sigma(\phi) = 1$  alors  $\sigma(\psi) = 1$ , on écrit  $\mathcal{A} \models \psi$ .
- Les formules  $\phi$  et  $\psi$  sont équivalentes si  $\phi \models \psi$  et  $\psi \models \phi$ , on écrit alors  $\phi \equiv \psi$ .
- Une formule  $\phi$  est satisfaisable ou cohérente si il existe une interprétation  $\sigma$  telle que,  $\sigma(\phi) = 1$ .
- Un ensemble de formules  $\mathcal{A}$  est satisfaisable ou cohérent si il existe une interprétation  $\sigma$  telle que  $\forall \phi \in \mathcal{A}$ ,  $\sigma(\phi) = 1$ . On appelle alors  $\sigma$  un modèle de  $\mathcal{A}$ .
- On dit que deux ensembles de formules sont équivalents s'ils ont exactement les mêmes modèles.
- Une formule  $\phi$  est insatisfaisable ou incohérente si pour toute interprétation  $\sigma$ ,  $\sigma(\phi) = 0$ . On montre facilement que  $\phi$  est insatisfaisable si  $\neg \phi$  est une tautologie.
- Un ensemble de formules  $\mathcal{A}$  est insatisfaisable ou incohérent si pour toute interprétation  $\sigma$ ,  $\exists \phi \in \mathcal{A}$  tel que  $\sigma(\phi) = 0$ . Autrement dit, il n'existe aucun modèle de  $\mathcal{A}$ .

De plus on dispose des résultats suivants :

**Proposition 4**  $\forall \phi, \psi \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ ,

- $\models (\phi \rightarrow \psi) \text{ssi } \phi \models \psi$ ;
- $\models (\phi \leftrightarrow \psi) \text{ssi } \phi \equiv \psi$ ;

- $si \models \phi$  et  $\models (\phi \rightarrow \psi)$  alors  $\models \psi$  ;
- $\models (\phi \wedge \psi)$  ssi  $\models \phi$  et  $\models \psi$  ;
- $si \models \phi$  ou  $\models \psi$  alors  $\models (\phi \vee \psi)$ .

**Proposition 5**  $\forall \phi \in \mathcal{L}, si \vdash \phi$  alors  $\models \phi$ .

**Théorème 2** (d'adéquation.)  $\forall \phi \in \mathcal{L}, si \models \phi$  alors  $\vdash \phi$ . Autrement dit, toutes les tautologies sont des théorèmes.

**Théorème 3** (de complétude.) Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble de formules de  $\mathcal{L}$ , soit  $\phi$  une formule de  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{A} \models \phi$  ssi  $\mathcal{A} \vdash \phi$ .

**Théorème 4** (de compacité.) Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble de formules de  $\mathcal{L}$ , si pour toute famille finie  $\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ , il existe une interprétation  $\sigma$  telle que  $\forall \phi \in \mathcal{A}', \sigma(\phi) = 1$  alors il existe une interprétation  $\sigma$  telle que  $\forall \phi \in \mathcal{A}, \sigma(\phi) = 1$ .

**Théorème 5** (de finitude.) Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble de formules de  $\mathcal{L}$ , si  $\mathcal{A} \models \phi$  alors il existe  $\mathcal{A}'$  fini,  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{A}' \models \phi$ .

**Théorème 6** (de décidabilité.)  $\forall \phi \in \mathcal{L}$ , il existe un programme qui pour toute formule  $\phi$ , indique en un temps fini si oui ou non  $\vdash \phi$ .

Il est souvent utile, d'un point de vue algorithmique, de transformer les formules propositionnelles en formules équivalentes ayant un caractère "canonique".

**Définition 3** On appelle **littéral** une proposition ou la négation d'une proposition.

**Définition 4** On appelle **clause** une disjonction de littéraux.

**Définition 5** On appelle **cube** une conjonction de littéraux.

Une forme **conjonctive normale** est une conjonction de clauses et une forme **disjonctive normale** est disjonction de cubes et on a le résultat suivant :

**Théorème 7** (de normalisation.)

- Toute formule propositionnelle admet une forme conjonctive normale qui lui est équivalente.
- Toute formule propositionnelle admet une forme disjonctive normale qui lui est équivalente.

## 2.2 Logique des prédicats

La logique propositionnelle est un formalisme logique intéressant, en particulier, du point de vue des applications informatiques, parce qu'il est décidable, cependant sa puissance d'expression est limitée. La logique des prédicats ou logique du premier ordre est un formalisme logique mieux adapté à la représentation des connaissances. Tout comme dans le cas de la logique propositionnelle, nous en présentons brièvement le langage, l'aspect syntaxique puis l'aspect sémantique.

### 2.2.1 Le langage de la logique des prédicats : $\mathcal{L}_{Pr}$

Le langage du calcul des prédicats  $\mathcal{L}_{Pr}$  est construit à partir d'un ensemble infini dénombrable de symboles de **prédicats**, d'un ensemble infini dénombrable de symboles **fonctionnels** (les symboles constants sont des symboles fonctionnels d'arité 0.), d'un ensemble infini dénombrable de **variables**, des connecteurs logiques :  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  et des **quantificateurs** universel  $\forall$ , et existentiel  $\exists$ .

**Définition 6** terme

- $x$  une variable est un terme ;
- $f$  un symbole fonctionnel est un terme ;

- si  $t_1, \dots, t_n$  sont des termes alors  $f(t_1, \dots, t_n)$  est un terme.

**Définition 7 atome**

- Si  $t_1, \dots, t_n$  sont des termes et  $p$  est un prédicat alors  $p(t_1, \dots, t_n)$  est un atome.

**Définition 8 formule**

- un atome est une formule ;
- si  $A$  et  $B$  sont des formules alors  $\neg A$ ,  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \rightarrow B$ ,  $A \leftrightarrow B$  sont des formules ;
- si  $A$  est une formule et  $x$  une variable alors  $\forall x A$ ,  $\exists x A$  sont des formules.

La présence de quantificateurs dans le langage du calcul des prédicats entraîne la définition de variables *liées* ou *libres* définies comme suit :

**Définition 9** Si l'occurrence d'une variable est placée sous la portée d'un quantificateur, cette occurrence est dite *liée*, sinon elle dite *libre*.

L'ensemble des variables liées est défini par :

**Définition 10** si  $A$  est une formule, l'ensemble **Varlie**( $A$ ) des variables liées de  $A$  est défini par :

- si  $A$  est un atome alors **Varlie**( $A$ ) =  $\emptyset$  ;
- si  $A$  est de la forme  $B \wedge C$  ou  $B \vee C$  ou  $B \rightarrow C$  ou  $B \leftrightarrow C$  alors **Varlie**( $A$ ) = **Varlie**( $B$ )  $\cup$  **Varlie**( $C$ ) ;
- si  $A$  est de la forme  $\neg B$  alors **Varlie**( $A$ ) = **Varlie**( $B$ ) ;
- si  $A$  est de la forme  $\forall x B$  ou  $\exists x B$  alors **Varlie**( $A$ ) = **Varlie**( $B$ )  $\cup$   $\{x\}$ .

L'ensemble des variables libres est défini par :

**Définition 11** si  $A$  est une formule, **Var**( $A$ ) est l'ensemble des variables de  $A$ , l'ensemble **Varlib**( $A$ ) des variables libres de  $A$  est défini par :

- si  $A$  est un atome alors **Varlib**( $A$ ) = **Var**( $A$ ) ;
- si  $A$  est de la forme  $B \wedge C$  ou  $B \vee C$  ou  $B \rightarrow C$  ou  $B \leftrightarrow C$  alors **Varlib**( $A$ ) = **Varlib**( $B$ )  $\cup$  **Varlib**( $C$ ) ;
- si  $A$  est de la forme  $\neg B$  alors **Varlib**( $A$ ) = **Varlib**( $B$ ) ;
- si  $A$  est de la forme  $\forall x B$  ou  $\exists x B$  alors **Varlib**( $A$ ) = **Varlib**( $B$ ) -  $\{x\}$ .

**Définition 12** Une formule  $A$  est dite **close** ou **fermée** si **Varlib**( $A$ ) =  $\emptyset$ .

## 2.2.2 Aspect syntaxique du calcul des prédicats

L'aspect syntaxique du calcul propositionnel revient à définir un système formel dans lequel les déductions que l'on peut faire conduisent à des théorèmes. La définition d'un système formel nécessite le recours à des axiomes ; pour des raisons de simplicité, nous utiliserons l'extension au calcul des prédicats du système de Lukasiewicz, et basé sur les 5 axiomes suivants :

soit  $A, B, C$  des formules,  $x$  une variable et  $t$  un terme,  $D$  une formule n'ayant pas  $x$  pour variable libre

- A1)  $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$  ;
- A2)  $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$  ;
- A3)  $((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A))$  ;
- A4)  $(\forall x A(x) \rightarrow A(t))$  ;
- A5)  $((D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow \forall x B))$  ;

Les règles d'inférence de ce système formel sont la règles de déduction, ou modus ponens :

$$\frac{\vdash A, \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}$$

et règle de généralisation :

$$\frac{\vdash A}{\vdash \forall x A.}$$

et on a les propriétés suivantes :

**Proposition 6**  $\forall A \in \mathcal{L}_{Pr} \quad \vdash (A \rightarrow A)$

**Proposition 7**  $\forall A_1, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{L}_{Pr} \times \dots \times \mathcal{L}_{Pr}$   
 si  $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash (A_n \rightarrow B)$  alors  $A_1, \dots, A_n \vdash B$

**Théorème 8** (de déduction). Soient  $A_1, \dots, A_n$  des formules closes de  $\mathcal{L}_{Pr}$ , si  $A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \vdash B$  alors  $A_1, \dots, A_{n-1} \vdash (A_n \rightarrow B)$

### 2.2.3 Aspect sémantique du calcul des prédicats

L'aspect sémantique du calcul des prédicats est l'interprétation des formules de  $\mathcal{L}_{Pr}$ .

**Définition 13** On appelle **interprétation** le triplet  $I = (D, I_c, I_v)$  où  $D$  est un ensemble non vide, appelé domaine d'interprétation,  $I_c$  est la fonction qui associe à tout symbole fonctionnel une valeur du domaine  $D$  et à tout prédicat une valeur dans  $\{0, 1\}$ , et  $I_v$  est la fonction qui associe à toute variable une valeur de  $D$ .

**Définition 14** L'interprétation d'une formule du calcul des prédicats  $A$  associe une valeur de vérité  $I(A)$  à  $A$  comme suit :

- si  $x$  est une variable libre alors  $I(x) = I_v(x)$  ;
- $I(f(t_1, \dots, t_n)) = (I_c(f))(I(t_1), \dots, I(t_n))$  ;
- $I(p(t_1, \dots, t_m)) = (I_c(p))(I(t_1), \dots, I(t_m))$  ;
- si  $A$  et  $B$  sont des formules alors  $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$  s'interprètent comme dans le calcul propositionnel ;
- si  $A$  est une formule et  $x$  une variable alors  $I(\forall x A) = 1$  si  $I_{x/d}(A) = 1$  pour tout élément  $d \in D$  ;
- si  $A$  est une formule et  $x$  une variable alors  $I(\exists x A) = 1$  si  $I_{x/d}(A) = 1$  pour au moins un élément  $d \in D$ .

On dispose des définitions suivantes :

Soient  $A \in \mathcal{L}_{Pr}$ ,  $B \in \mathcal{L}_{Pr}$  et  $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_{Pr}$ .

- $A$  est une **tautologie** (ou une formule valide),  $\models A$ , si pour toute interprétation  $I$ ,  $I(A) = 1$  ;
- $B$  est une **conséquence** de  $A$  si pour toute interprétation  $I$ ,  $I(A) = 1$  alors  $I(B) = 1$ , on écrit  $A \models B$  ;
- $B$  est une **conséquence** de  $\mathcal{F}$  si pour toute interprétation  $I$ , tq  $\forall A \in \mathcal{F}, I(A) = 1$  alors  $I(B) = 1$ , on écrit  $\mathcal{F} \models B$  ;
- $A$  est **satisfaisable** s'il existe une interprétation  $I$  tq  $I(A) = 1$  ;
- $\mathcal{F}$  est **satisfaisable** s'il existe une interprétation  $I$  tq  $\forall A \in \mathcal{F}, I(A) = 1$  ;
- $A$  est **insatisfaisable** ou **incohérente** si pour toute interprétation  $I$ ,  $I(A) = 0$  ;
- $\mathcal{F}$  est **insatisfaisable** si pour toute interprétation  $I$ ,  $\exists A \in \mathcal{F}$  tq  $I(A) = 0$  ;

**Proposition 8**  $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_{Pr}$  ensemble de formules closes,  $B$  formule close  $\mathcal{F} \models B$  si et seulement si  $\mathcal{F} \cup \{\neg B\}$  est insatisfaisable

Voici quelques propriétés :

$$\begin{array}{ll}
 (\forall x A \wedge \forall x B) & \equiv \quad \forall x (A \wedge B) & \exists x (A \vee B) & \equiv \quad (\exists x A \vee \exists x B) \\
 (\forall x A \vee \forall x B) & \rightarrow \quad \forall x (A \vee B) & \exists x (A \wedge B) & \rightarrow \quad (\exists x A \wedge \exists x B) \\
 \forall x (A \rightarrow B) & \rightarrow \quad (\forall x A \rightarrow \forall x B) & \exists x (A \rightarrow B) & \equiv \quad (\forall x A \rightarrow \exists x B) \\
 \forall x (A \equiv B) & \rightarrow \quad (\forall x A \equiv \forall x B) & \forall x \neg A & \equiv \quad \neg \exists x A
 \end{array}$$

$$\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$$

$$\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$$

$$\exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$$

de plus, on dispose des résultats suivants :

**Proposition 9**  $\forall A \in \mathcal{L}_{Pr}$  si  $\vdash A$  alors  $\models A$  (les formules qui sont des théorèmes sont des tautologies)

**Théorème 9** (d'adéquation).  $\forall A \in \mathcal{L}_{Pr}$  si  $\models A$  alors  $\vdash A$

**Théorème 10** (de complétude). Soit  $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_{Pr}$  et  $B \in \mathcal{L}_{Pr}$ ,  $\mathcal{F} \models B$  ssi  $\mathcal{F} \vdash B$

**Théorème 11** (de compacité). Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble de formules de  $\mathcal{L}_{Pr}$ . Si toute famille finie  $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$  est satisfaisable alors  $\mathcal{F}$  est aussi satisfaisable.

**Théorème 12** (de finitude). Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble de formules de  $\mathcal{L}_{Pr}$ . Soit  $B \in \mathcal{L}_{Pr}$  si  $\mathcal{F} \models B$  alors  $\exists \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$  fini tq  $\mathcal{F}' \models B$

**Proposition 10** Soit  $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}_{Pr}$  et  $B$  une tautologie,  $\mathcal{F} \vdash \neg B$  si  $\mathcal{F}$  n'a pas de modèle.

**Théorème 13** Le calcul des prédicats est indécidable, c'est à dire qu'il n'existe aucun programme qui pour une formule  $A \in \mathcal{L}_{Pr}$  indique en un temps fini si  $A$  est satisfaisable.

Plus précisément le calcul des prédicats est semi-décidable, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible d'assurer la terminaison d'un programme qui teste la satisfaisabilité d'une formule dans le cas où celle-ci est insatisfaisable. D'un point de vue algorithmique, les problèmes liés à la quantification peuvent parfois s'avérer gênants, aussi il est possible de se débarrasser des quantificateurs comme suit :

**Définition 15** Soit une formule  $A \in \mathcal{L}_{Pr}$ ,  $A$  est sous **forme prénexe** si  $A = Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n M$ , où  $Q_1, \dots, Q_n$  est soit  $\forall$ , soit  $\exists$  et  $M$  ne contient aucun quantificateur.

**Proposition 11** pour toute formule  $A \in \mathcal{L}_{Pr}$  il existe une forme prénexe équivalente à  $A$ .

Les notions de littéraux, clauses et cubes sont étendus au calcul des prédicats comme suit. On appelle **littéral** un atome ou la négation d'un atome, une **clause** est une disjonction de littéraux et un **cube** est conjonction de littéraux. Une forme **conjonctive normale** est une forme prénexe dont la matrice  $M$  est une conjonction de clauses. Une forme **disjonctive normale** est une forme prénexe dont la matrice  $M$  est une disjonction de cubes.

La mise sous **forme de Skolem** permet de supprimer les quantificateurs dans une formule du calcul des prédicats.

Soit une formule  $A \in \mathcal{L}_{Pr}$ , la mise sous forme de Skolem de  $A$ , notée  $S_A$ , selon l'algorithme suivant :

#### début

- transformation de  $A$  en forme prénexe :  $Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n M$  ;
- transformation de  $M$  en forme conjonctive normale  $M'$  ;
- skolémisation :
  - 1) associer à toute variable quantifiée existentiellement le terme constitué par un symbole fonctionnel ayant pour arguments la liste des variables quantifiées universellement qui précèdent la variable ;
  - 2) remplacer chaque occurrence de variable quantifiée existentiellement par le terme défini en 1) ;
  - 3) supprimer les quantificateurs existentiels.



fin

et on a le résultat suivant :

**Proposition 12** *Soit  $S_A$  forme de skolem de  $A$ ,  $A$  est satisfaisable si et seulement si  $S_A$  est satisfaisable.*

Le théorème de Herbrand permet de ramener le problème de la satisfaisabilité d'une formule du calcul des prédicats au problème de la satisfaisabilité d'un ensemble de clauses du calcul propositionnel. Pour cela, on associe à la forme conjonctive normale d'une formule  $A \in \mathcal{L}_{Pr}$ , l'ensemble  $C$  des clauses correspondantes et on construit l'**univers de Herbrand** associé à cet ensemble de clauses  $C$ , c'est-à-dire l'ensemble de tous les termes sans variable construit à partir du vocabulaire de  $C$ .

On appelle **système de Herbrand**  $SH_C$  associé à  $C$ , l'ensemble des clauses obtenues à partir de  $C$  en remplaçant les variables par des éléments de l'univers de Herbrand, et on a le résultat suivant :

**Proposition 13 théorème de Herbrand** *Soit  $C$  un ensemble fini de clauses, et  $C$  et  $SH_C$  le système de Herbrand associé à  $C$ ,  $C$  est satisfaisable si et seulement si  $SH_C$  est satisfaisable.*

## 2.3 Logique possibiliste

La logique possibiliste résulte de l'utilisation d'un formalisme logique avec la théorie des possibilité [36, 37, 55]. Nous en présentons maintenant les bases.

### 2.3.1 Distribution de possibilités

La notion de base de la théorie des possibilités est la notion de distribution de possibilité [86] notée  $\pi$ , qui est une fonction de l'ensemble des interprétations  $\mathcal{W}$  dans l'intervalle des réels  $[0, 1]$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &\rightarrow [0, 1] \\ \omega &\rightarrow \pi(\omega)\end{aligned}$$

La possibilité  $\pi(\omega)$  représente le degré de compatibilité de l'interprétation  $\omega$  avec les croyances disponibles. Par convention,  $\pi(\omega) = 1$  signifie qu'il est tout à fait possible que l'interprétation  $\omega$  soit satisfaisante (et donc qu'elle représente fidèlement les croyances disponibles). Si  $0 < \pi(\omega) < 1$ , il est quelque peu possible que l'interprétation  $\omega$  soit satisfaisante. Dans le cas où  $\pi(\omega) = 0$ , l'interprétation est considérée comme insatisfaisante (elle ne représente pas les croyances disponibles). Si  $\omega$  et  $\omega'$  sont deux interprétations de  $\mathcal{W}$  et que  $\pi_{\omega'} < \pi_{\omega}$  alors  $\omega$  est dite plus plausible que (ou préférée à)  $\omega'$ . Une distribution de possibilité  $\pi$  est dite normalisée si et seulement si il existe une interprétation  $\omega$  telle que  $\pi(\omega) = 1$ .

D'un point de vue syntaxique, le degré de possibilité d'une formule  $\phi$ , noté  $\Pi(\phi)$  est obtenu à partir d'une distribution de possibilité  $\pi$  sur les interprétations d'un ensemble  $\mathcal{W}$ . Formellement :

$$\Pi(\phi) = \max \{ \pi(\omega) \mid \omega \models \phi \}$$

Le complément du degré de possibilité d'une formule  $\phi$  est son degré de nécessité, noté  $N(\phi)$  est défini par :

$$N(\phi) = 1 - \Pi(\neg\phi)$$

Les degrés de nécessité sont inversement ordonnés par rapport aux degrés de possibilités. En effet,  $N(\phi) = 1$  signifie que  $\phi$  est une partie certaine des croyances alors que  $N(\phi) = 0$  signifie qu'aucune croyance ou préférence n'est disponible pour  $\phi$ , cependant, cela n'implique pas que  $\phi$  est fausse ou devrait l'être.

### 2.3.2 Bases possibilistes

Une base possibiliste est un ensemble de formules pondérées par des mesures de nécessité . Formellement, une base possibiliste, notée  $B$  est définie par :

$$B = \{(\phi_i, \alpha_i) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$$

où  $\phi_i$  est une formule propositionnelle et  $\alpha_i$  un réel dans l'intervalle  $[0, 1]$  représentant le degré de nécessité minimal associé à  $\phi_i$ . Nous avons donc  $\alpha_i \leq N(\phi_i)$ . Le scalaire  $\alpha_i$  est le niveau de certitude de  $\phi_i$  si on représente des croyances sur le monde réel ou bien son niveau de priorité si on représente les préférences d'un agent.

Les formules de poids nul ne sont pas représentées car seules les croyances explicites sont représentées. Soit  $\phi_i$  et  $\phi_j$  deux formules,  $\phi_i$  est prioritaire par rapport à  $\phi_j$  si le poids  $\alpha_i$  qui lui est associé est plus grand que le poids  $\alpha_j$  associé à  $\phi_j$ . Nous notons  $B^*$  l'ensemble de formules propositionnelles composé des formules  $\phi \in B$  privées de leurs poids. Formellement :

$$B = \{\phi_i \mid i \in \{1, \dots, n\}, (\phi_i, \alpha_i) \in B\}$$

La représentation sémantique des croyances exprimées par  $B$  est basée sur la construction d'une distribution de possibilité, notée  $\pi_B$ , associant à chaque interprétation son degré de possibilité par rapport aux croyances de  $B$ . La construction d'une distribution de possibilité unique  $\pi_B$  à partir d'une base possibiliste  $B$  est obtenue en pondérant les interprétations modèles des formules de  $B$  par 1 et les autres par le plus grand poids des formules qu'elles falsifient. Nous obtenons [37] :

**Définition 16**  $\forall \omega \in \mathcal{W}$ ,

$$\pi_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall (\phi_i, \alpha_i) \in B, \\ & \omega \in \text{mod}(\phi_i), \\ 1 - \max \{\alpha_i \mid (\phi_i, \alpha_i) \in B \text{ et } I \notin \text{mod}(\phi_i)\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La représentation sémantique des formules pondérées en logique possibiliste est une extension de celle de la logique propositionnelle classique. Les modèles de la base possibiliste sont considérés les meilleurs, on associe cependant une relation d'ordre aux contre-modèles de  $B$ . Si  $B$  contient uniquement des formules certaines (Tous les poids sont alors égaux à 1), on a alors une distribution de possibilité dite binaire. Chaque interprétation reçoit soit la valeur 1 soit la valeur 0. Les interprétations de poids 1 sont les modèles de  $B$  au sens classique et les interprétations de poids 0 sont les contre-modèles.

La notion d'équivalence entre deux bases possibilistes repose sur l'équivalence des distribution de possibilités associées à chaque base. C'est à dire :

**Définition 17** Soit  $B$  et  $B'$  deux bases possibilistes. Les bases  $B$  et  $B'$  sont dites équivalentes, noté  $B \equiv_S B'$ , si et seulement si  $\pi_B = \pi_{B'}$ .

### 2.3.3 Sous-sommation et inférence en logique possibiliste

Nous rappelons maintenant quelques notions sur la sous-sommation et l'inférence en logique possibiliste [37].

**Définition 18 ( $\alpha$ -coupe et  $\alpha$ -coupe stricte)** Soit  $B$  une base possibiliste et  $\alpha \in [0, 1]$  un scalaire réel. Une  $\alpha$ -coupe de  $B$ , notée  $B_{\geq \alpha}$  (respectivement  $B_{> \alpha}$ ) est définie par :

$$B_{\geq \alpha} = \{\phi_i \mid (\phi_i, \alpha_i) \in B, \alpha_i \geq \alpha\}$$

Une  $\alpha$ -coupe stricte, notée  $B_{> \alpha}$ , est définie quand à elle par :

$$B_{> \alpha} = \{\phi_i \mid (\phi_i, \alpha_i) \in B, \alpha_i > \alpha\}$$

Les modèles de la base  $B_{\geq \alpha}$  peuvent être calculés à partir de  $\pi_B$ . Formellement :

$$B_{\geq \alpha} = \{\omega \mid \omega \in \mathcal{W} \text{ et } \pi_B(\omega) > 1 - \alpha\}$$

De même pour une base  $B_{> \alpha}$  nous avons :

$$B_{> \alpha} = \{\omega \mid \omega \in \mathcal{W} \text{ et } \pi_B(\omega) \geq 1 - \alpha\}$$

Une base possibiliste  $B$  est cohérente si la base propositionnelle  $B^*$  qui lui est associée est cohérente. Le degré d'incohérence de la base  $B$ , noté  $Inc(B)$ , est le plus grand poids dans  $B$  où l'incohérence est rencontrée. Formellement :

**Définition 19** *Le degré d'incohérence d'une base possibiliste  $B$  est tel que :*

$$Inc(B) = \max \{\alpha_i \mid B_{\geq \alpha_i} \text{ est cohérente} \},$$

avec  $Inc(B) = 0$  quand  $B$  est cohérente.

**Définition 20** *Soit  $(F, \alpha)$  une formule de la base  $B$ .  $(\phi, \alpha)$  est sous-sommée dans  $B$  si*

$$(B \setminus \{(\phi, \alpha)\})_{\geq \alpha} \vdash F.$$

*$(\phi, \alpha)$  est sous-sommée strictement dans  $B$  si  $B_{> \alpha} \vdash \phi$ .*

Les degrés de nécessité sont propagés par le processus d'inférence en suivant la définition suivante :

**Définition 21** *Soit  $B$  une base possibiliste, Soit  $\phi, \alpha$  une formule possibiliste avec  $\alpha > Inc(B)$ .  $\phi, \alpha$  est une conséquence de  $B$ , notée  $B \vdash_{\pi} (\phi, \alpha)$  si et seulement si  $B_{\geq \alpha} \vdash \phi$ .*

Cette définition implique que si  $B \vdash_{\pi} (\phi, \alpha)$  alors  $B \vdash_{\pi} (\phi, \beta)$  pour tous les  $\beta$  tels que  $\alpha \geq \beta > Inc(B)$ . Cependant, quand il n'y a pas d'ambiguïté possible, nous écrivons  $B \vdash_{\pi} (\phi, \alpha)$ , en assumant implicitement que  $\alpha$  représente le degré maximal pour lequel  $(\phi, \alpha)$  est une conséquence de  $B$ .

Contrairement à la logique propositionnelle classique où une base incohérente n'infère que des conclusions triviales, la logique possibiliste récupère à partir d'une base incohérente une sous base « utile ». Cette sous-base, notée  $\rho(B)$  est composée de l'ensemble des formules propositionnelles de  $B$  de poids strictement supérieur au degré d'incohérence de  $B$ . Formellement :

**Définition 22** *Soit  $B$  une base de croyance possibiliste. La sous-base utile de  $B$ , notée  $\rho(B)$ , est définie par :*

$$\rho(B) = \{\phi_i \mid (\phi_i, \alpha_i) \in B \text{ and } \alpha_i > Inc(B)\}.$$

En effet, la logique possibiliste procède par une révision de la base incohérente en ignorant les formules au niveau et au-dessous du degré d'incohérence. Ce principe est identique à la méthode d'ajustement proposé dans le cadre de la révision [84].

La correspondance entre l'approche syntaxique et l'approche sémantique est obtenue par :

- Une base possibiliste  $B$  est cohérente si et seulement si la distribution de possibilités qui lui est associée est normalisée. Nous avons :

$$Inc(B) = 1 - \max_{\omega \in \mathcal{W}} (\pi_B(\omega))$$

- Une interprétation  $\omega$  est un modèle de  $\rho(B)$  si et seulement si  $\omega$  possède un degré de possibilité maximal dans  $\pi_B$  (si et seulement si  $\pi_B(\omega) = 1$ , si  $\pi_B$  est normalisée).  $(\phi, \alpha)$  est une conséquence de  $B$  si et seulement si  $\phi$  est vraie pour chaque interprétation dont le degré de possibilité est maximal dans  $\pi_B$ .

## Chapitre 3

# Formalismes conceptuels et approche Objet

### Contents

---

<b>3.1</b>	<b>Concept</b>	<b>28</b>
<b>3.2</b>	<b>Réseaux sémantiques</b>	<b>28</b>
3.2.1	Origines	28
3.2.2	Cadre conceptuel (Frame)	29
<b>3.3</b>	<b>Graphes conceptuels</b>	<b>30</b>
3.3.1	Définition formelle des graphes conceptuels	30
3.3.2	Structure de graphes conceptuels	30
<b>3.4</b>	<b>Logiques de descriptions</b>	<b>30</b>
3.4.1	Syntaxe des logiques de description	31
3.4.2	Sémantique des logiques de description	31
3.4.3	Base de connaissance en Logique de Description	31
<b>3.5</b>	<b>L'approche Objet</b>	<b>31</b>
3.5.1	Encapsulation	32
3.5.2	Héritage et polymorphisme	33

---

## Introduction

L'approche Objet est une des base fondamentale de ce travail de thèse. Dans ce chapitre, nous étudions brièvement cette approche en commençant par décrire les formalismes conceptuels dont l'approche Objet est elle même inspirée.

### 3.1 Concept

Le formalisme conceptuel est très utilisé en représentation des connaissances. De nombreux travaux ont permis de le développer et de l'enrichir [72] [61] [4] [82] [81]. Des concepts peuvent être caractérisés par :

- Les entités qui définissent les objets (concrets, abstraits, voire événements) de ce concept.
- Leurs caractéristiques incluant la description des entités et leurs identifiants (attribut permettant d'identifier exactement une et une seule entité dans l'univers).
- Leurs relations qui sont des représentation des liens qui s'établissent entre les différentes entités et n'ayant pas d'existence propre. Celles-ci sont caractérisées par un nom et, éventuellement, par des attributs.

Très vite la notion d'ensemble de concept à vu le jour. La première organisation de concepts formalisée est donnée sous la forme de réseaux sémantiques.

### 3.2 Réseaux sémantiques

#### 3.2.1 Origines

La question de l'organisation des concepts est travaillée depuis l'antiquité. Aristote le premier considère que les mots doivent être clairement définis afin d'éviter des erreurs de raisonnement. Pour cela, il a proposé un modèle hiérarchique reflétant une approche logique de l'organisation des concepts. Le terme de réseau sémantique est employé pour la première fois par R. Quillian [72]. Cette approche a été développée dans le cadre d'une thèse portant sur la réalisation d'un programme capable de comprendre un texte. Le modèle utilisé, noté TLC pour *Teaching Language Comprehenser*, est un système d'apprentissage et de compréhension du langage. Le choix de représentation de la connaissance s'inspire de celui d'Aristote mais il y apporte deux points importants :

- Le modèle TLC introduit le typage des propriétés associées
- TLC est un modèle d'organisation, alors que la structure d'Aristote est purement logique.

La figure 3.1 représente un réseau sémantique d'après R. Quillian. Le modèle de R. Quillian est basé sur l'exis-

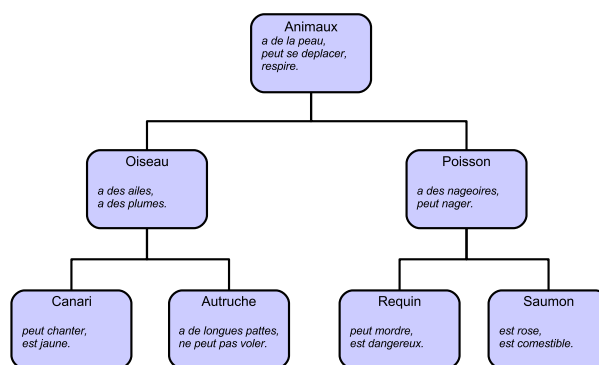


FIG. 3.1 – Exemple de représentation TLC de R. Quillian.

tence d'un réseau de relations hiérarchisées entre des concepts. Ceux-ci sont représentés comme les noeuds

d'un graphe auxquels sont attachés des propriétés. Les arcs du graphe représentent la relation de hiérarchisation. Par souci d'économie cognitive, TLC associe à la hiérarchisation la notion de spécification. Si deux concepts sont liés hiérarchiquement, le concept le plus bas dans la hiérarchie englobe les propriétés du concept le plus haut. Afin de connaître toutes les propriétés d'un concept, il suffit de remonter le graphe en suivant les arcs de hiérarchie jusqu'à l'élément le plus haut. La figure 3.2 illustre la reconstruction d'un concept à partir des liens hiérarchiques. Cette méthode de représentation est appelée héritage de concept. Chaque concept est

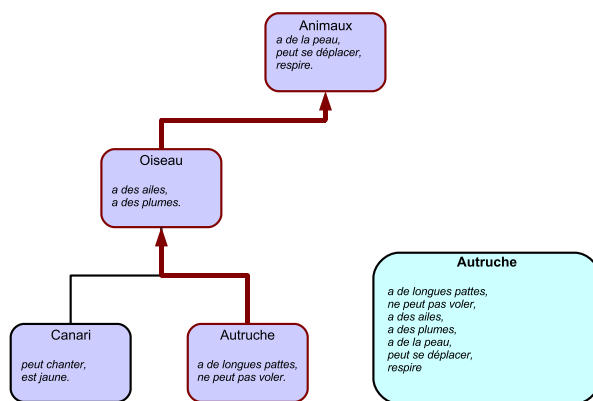


FIG. 3.2 – Reconstruction d'un concept par parcours de la hiérarchie.

vu comme une spécialisation du concept qui est son supérieur hiérarchique direct. Le sommet de la hiérarchie comporte alors les concepts les plus généraux, les concepts en bas de la hiérarchie sont les concepts les plus spécifiques. Ces graphes sous forme d'arbre sont appelés taxinomie, ou arbre isa.

### 3.2.2 Cadre conceptuel (Frame)

En 1975, Marvin Minsky [61] avance que la plupart des théories en Intelligence artificielle et en psychologie sont dans l'ensemble trop spécialisées. Reprenant les travaux de Frederic Bartlett [7], il incite à étendre les réseaux sémantiques en apportant davantage de relations entre les concepts et des contrôles sur les propriétés des concepts. Il nomme cette nouvelle représentation "Frame". La première définition informelle d'un "Frame" est la suivante : *"Un frame est une structure de données représentant une situation stéréotypée, comme se trouver dans un certain type de salon ou se rendre à un goûter d'anniversaire d'un enfant. Divers types d'informations sont associés à chaque frame. Certaines d'entre elles concernent l'utilisation de ce frame. D'autres portent sur ce que l'on s'attend à ce qu'il arrive par la suite. D'autres encore portent sur ce qu'il faut faire si ces attentes ne sont pas confirmées."*

De manière plus détaillée, un "Frame" est une structure de données regroupant l'ensemble des connaissances relatives à un concept. Un frame est un prototype décrivant une situation ou un objet. Il sert de référence pour comparer des objets que l'on désire reconnaître, analyser ou classer. Les prototypes doivent prendre en compte toutes les formes possibles d'expression de la connaissance. Les frames possèdent par conséquent une richesse descriptive plus vaste que les réseaux sémantiques. Un "Frame" est composé d'un ensemble d'attributs qui sont les propriétés caractérisant le concept. Ces attributs contiennent des facettes qui décrivent l'ensemble des valeurs possibles pour cet attribut. Ces facettes peuvent être de deux formes : déclaratives et procédurales. Les premières associent des valeurs aux attributs, alors que les secondes décrivent les procédures, appelées réflexes, qui sont activées lors des accès à ces valeurs. Les "Frames" appartenant à un ensemble de "Frames" propres à un même thème sont organisés dans une même structure hiérarchisée. Chaque frame pouvant alors être vu comme un concept dans un réseau sémantique.

### 3.3 Graphes conceptuels

Avec l'évolution des réseaux sémantiques vers les schémas, John Sowa entreprend de joindre deux représentations afin d'en tirer les avantages. A une représentation conceptuelle il associe la logique [82]. La logique apporte la capacité d'inférence, la représentation conceptuelle son expressivité et sa simplicité. Pour Sowa, un concept est défini par un ensemble de propriétés. Une instance est un objet représenté par un concept. Par exemple, un animal est un concept. L'éléphant *Jumbo* est une instance d'animal. La principale différence entre un réseau sémantique et un graphe conceptuel est que le réseau sémantique s'appuie sur l'existence ou non de propriétés pour un concept. Dans un graphe conceptuel, les propriétés sont représentées par les attributs du concept. Les concepts sont énoncés en intention contrairement aux réseaux sémantiques pour lesquels c'est l'étude des objets qui valide l'énoncé d'un concept. On parle dans ce cas d'énoncé en extension. Les graphes conceptuels permettent l'ajout de nouvelles relations entre les concepts. Ces relations sont des noeuds du graphe liant un ou plusieurs concepts. La définition formelle de ces noeuds et des arcs qui leurs sont liés spécifie le type de relation décrit.

#### 3.3.1 Définition formelle des graphes conceptuels

D'après Sowa [82], la définition d'un graphe conceptuel est la suivante :

**Définition 23** *Les graphes conceptuels sont des graphes finis, connectés et bipartites tels que :*

- *Les deux sortes de nœuds d'un graphe bipartite sont les concepts et les relations conceptuelles.*
- *Chaque relation conceptuelle possède un arc ou plus, chacun d'entre eux doit être lié à un concept.*
- *Si une relation a  $n$  arcs, elle est dite  $n$ -adique.*
- *Un unique concept peut former un graphe conceptuel, mais chaque arc de chaque relation conceptuelle doit être lié à un concept quelconque.*

En 1992, Une nouvelle définition plus formelle fut énoncée par Michel Chein [22].

**Définition 24** *Un graphe conceptuel est un ensemble  $G = (C, R, A, lab)$  tel que :*

- *$C$  est un ensemble non-vide de sommets conceptuels, correspondant aux concepts instanciés du graphe.*
- *$R$  est un ensemble de sommets relationnels, correspondant aux relations instanciées du graphe.*
- *$A$  est l'ensemble des arêtes du graphe. Nous représenterons.*
- *$lab$  est une application qui associe à chaque sommet du graphe une étiquette.*

Cette définition décrit un cadre formel mais reste très libre sur la structure des graphes pouvant être construits. Nous nous intéressons maintenant à certaines de ces structures.

#### 3.3.2 Structure de graphes conceptuels

Il existe deux grandes structures de graphes conceptuels. La structure en treillis et la structure en étoile, appelée aussi S-graph.

### 3.4 Logiques de descriptions

Les logiques de description ont été conçues à partir des graphes conceptuels et de la sémantique des Frames de Minsky [60] où l'on a des concepts représentés par des cadres qui sont caractérisés par un certain nombre d'attributs (en anglais *slots*) qui contiennent de l'information sur leur contenu.

Les logiques de description forment une famille de langages de représentation de connaissance qui peuvent être utilisées pour représenter la connaissance terminologique d'un domaine d'application d'une façon structurée et formelle. Le nom « logique de description » peut être interprété de deux manières. D'une part ces langages ont été élaborés pour écrire la « description » des concepts pertinents d'un domaine d'application. D'une autre part, une caractéristique cruciale de ces langages est qu'ils ont une sémantique formelle définie en logique des prédicats. Dans ce sens, nous pouvons dire que les logiques de descriptions ont une sémantique « descriptive » formelle.

La syntaxe d'une logique de description est composée d'un ensemble de concepts atomiques, d'un ensemble de rôles atomiques et d'une définition récursive pour la construction de concepts et de rôles complexes [63]. La sémantique d'une logique de description est définie par un domaine et une fonction d'interprétation qui fait correspondre à chaque concept un ensemble de valeurs du domaines (ou individus) et à chaque rôle un ensemble de couples d'individus. Les concepts et rôles complexes sont interprétés récursivement à partir respectivement des concepts et rôles atomiques qui les définissent. La logique de description la plus basique est l'*Attribute Language*, est notée  $\mathcal{AL}$  [77].

### 3.4.1 Syntaxe des logiques de description

La syntaxe de  $\mathcal{AL}$  est composée d'un ensemble de concepts atomiques, d'un ensemble de rôles atomiques et d'une définition récursive pour les concepts et les rôles complexes. Formellement :

- Un concept atomique est un  $\mathcal{AL}$ -concept ;
- $\top$  est un  $\mathcal{AL}$ -concept ; (*Le concept le plus général*)
- $\perp$  est un  $\mathcal{AL}$ -concept ; (*Le concept le plus spécifique*)
- si  $A$  est un concept atomique alors  $\neg A$  est un  $\mathcal{AL}$ -concept ; (*le complément de  $A$* )
- si  $C$  et  $D$  sont des  $\mathcal{AL}$ -concepts alors  $C \sqcap D$  est un  $\mathcal{AL}$ -concept ; (*l'intersection de  $C$  et  $D$* )
- si  $C$  est un  $\mathcal{AL}$ -concept et  $R$  est un rôle alors  $\forall R.C$  est un  $\mathcal{AL}$ -concept ; (*La restriction de valeur pour le couple en relation pour le rôle*)
- si  $R$  est un rôle alors  $\exists R.\top$  est un  $\mathcal{AL}$ -concept. (*Existence d'au moins un couple en relation pour le rôle*)

### 3.4.2 Sémantique des logiques de description

Soit  $\Delta$  un domaine pouvant être infini, l'interprétation est définie par un couple  $\langle \Delta, I \rangle$  où  $I$  est une fonction d'interprétation qui associe à chaque concept un sous-ensemble de  $\Delta$  et qui associe à chaque rôle un sous-ensemble  $\Delta \times \Delta$ . Formellement :

- $I(\top) = \Delta$  ;
- $I(\perp) = \emptyset$  ;
- $I(\neg A) = \Delta - I(A)$  ;
- $I(C \sqcap D) = I(C) \cap I(D)$
- $I(\forall R.C) = \{x \in \Delta \mid \forall y \in \Delta, \text{ si } (x, y) \in I(R) \text{ alors } y \in I(C)\}$  ; (*L'ensemble des individus dans le domaine qui sont en relation avec l'ensemble des interprétations de  $C$* )
- $I(\exists R.\top) = \{x \in \Delta \mid \exists y \in \Delta, (x, y) \in I(R) \text{ et } y \in \Delta\}$ . (*L'ensemble de tous les individus dans le domaine qui sont en relation avec au moins un autre individu pour le rôle  $R$* )

### 3.4.3 Base de connaissance en Logique de Description

Une base de connaissance en logique de description est composée de deux parties. La première, notée  $TBox$  est un ensemble de concepts et de rôles. La deuxième, notée  $ABox$ , est un ensemble fini d'instances des concepts et des rôles de  $TBox$  [3]. Les éléments de base de  $TBox$  sont :

- des concepts atomiques qui représentent les sous-ensembles du domaine ;
- des rôles qui représentent les relations binaires sur le domaine ;
- des constructeurs de concept servant à créer des concepts complexes ;
- des constructeurs de rôles servant à créer des rôles complexes.

L'ensemble des constructeurs de concepts et l'ensemble des constructeurs de rôles sont définis selon un formalisme issu d'une famille de formalismes de logiques de descriptions. Nous ne détaillons pas ici les familles de formalismes de logiques de description car ils ne sont pas traités dans ce travail, un état de l'art plus complet sur les logiques de descriptions et les représentations conceptuelle peut être obtenu en [68].

## 3.5 L'approche Objet

Les modèles à objets ont été créés pour les entités du monde réel à partir d'attributs, de comportement d'états. Le concept essentiel est bien sûr celui d'objet. Il n'est pas simple à définir car composite, c'est-à-dire



intégrant plusieurs aspects. Dans un modèle objet, toute entité du monde réel est un objet et réciproquement, tout objet représente une entité du monde réel. Nous présentons le paradigme Objet en nous inspirant du travail décrit dans [41].

**Définition 25** *Un objet est abstraction d'une entité du monde réel caractérisée par une identité, un état et un comportement [42].*

Un objet est donc une instance d'entité. Il possède une identité qui lui permet de le repérer de manière unique. Par exemple, un oiseau d'identité "titi" est un objet, il est caractérisé par un état constitué de sa couleur de plumage, son espèce, sa taille, etc. Il a aussi un comportement composé d'un ensemble d'opérations permettant d'agir dessus, par exemple manger(), marcher(), sauter(), mourir(), etc. L'objet « titi » est donc un ensemble de valeurs. A travers cet exemple, deux concepts importants apparaissent associés à la notion d'objet. Tout d'abord, un objet possède un identifiant qui matérialise son identité. Ainsi, deux objets ayant même valeurs mais un identifiant différent sont considérés comme différents. Un objet peut changer de valeur mais pas d'identifiant (sinon on change d'objet).

**Définition 26** *Un identifiant objet est une référence unique et invariante attribuée à un objet lors de sa création permettant de le désigner et de le retrouver tout au long de sa vie [42].*

L'identité d'objet est un concept important : c'est la propriété d'un objet qui le distingue logiquement et physiquement des autres objets. Un identifiant objet est en général une adresse logique invariante. La référence apporte une plus grande flexibilité pour modéliser des objets complexes ; en particulier un objet peut référencer un autre objet. Ainsi, l'objet oiseau référence l'objet nid. Il en est de même pour l'objet oisillon. On pourrait traduire cette référence par la phrase : L'oiseau et son oisillon connaissent leur nid. Mais ce nid est unique et donc les deux objets ne peuvent connaître deux nids différents. Le partage référentiel d'un objet par deux autres objets devient possible sans duplication de données. Comme le montre ces exemples, en plus d'identifiants, un objet possède des attributs aussi appelés variables d'instance. Un attribut mémorise une valeur ou une référence précisant une caractéristique de l'objet. La valeur peut être élémentaire (un entier, un réel ou un texte) ou complexe (valeurs multiples). La référence correspond à l'identifiant d'un autre objet.

**Définition 27** *Un attribut est la caractéristique d'un objet désignée par un nom permettant de mémoriser une ou plusieurs valeurs, ou un ou plusieurs identifiants d'objets [43].*

### 3.5.1 Encapsulation

Au delà d'une structure statique permettant de modéliser des objets et des liens entre objets, le paradigme Objet permet d'encapsuler les structures des objets par des opérations, appelées méthodes

**Définition 28** *Une méthode (ou opération) est la modélisation d'une action applicable sur un objet, caractérisée par un en-tête appelé signature définissant son nom, ses paramètres d'appel et ses paramètres de retour [43].*

Le principe d'encapsulation permet de masquer les attributs et les méthodes en ne laissant visible que les méthodes publiques. Les méthodes cachées sont qualifiées alors de privées. L'encapsulation est un concept fondamental qui permet de cacher un groupe de données et un groupe de procédures associées en les fusionnant et en ne laissant visible que l'interface composée des attributs et des méthodes publiques.

**Définition 29** *On appelle interface l'ensemble des signatures des méthodes, y compris les lectures et écritures d'attributs publics, qui sont applicables depuis l'extérieur sur un objet [44].*

L'interface d'un objet contient toutes les méthodes publiques que peuvent utiliser les clients de l'objet. Une interface ne doit pas être changée fréquemment : elle peut être enrichie par de nouvelles signatures de méthodes, mais il faut éviter de changer les signatures des méthodes existantes. En conséquence, un objet exporte une interface qui constitue un véritable contrat avec les utilisateurs. Les attributs privés (non visibles de l'extérieur) et le code des méthodes peuvent être modifiés, mais changer des méthodes de l'interface nécessite un nouveau processus de conception des objets. Ce principe facilite la programmation modulaire et l'indépendance des programmes à l'implantation des objets. Par exemple, il est possible de développer une structure de données

sous la forme d'un tableau, permettant de mémoriser le contenu d'un écran. Cette structure peut être encapsulée dans des méthodes de signatures fixées permettant d'afficher, de redimensionner, de saisir des caractères. Le changement du tableau en liste nécessitera de changer le code des méthodes mais pas l'interface, et donc pas les clients. En résumé, les méthodes et attributs public constituent l'interface d'un objet. Ceux-ci sont les seuls accessibles à l'extérieur de l'implantation de l'objet. Le code qui constitue cette implantation peut être structuré. Certaines méthodes sont alors invisibles à l'extérieur de l'objet : elles sont appelées méthodes privées. Par exemple, la saisie d'un texte peut s'effectuer par plusieurs appels d'une méthode saisissant une ligne : la méthode `sasirLigne()` restera invisible du monde extérieur et seule la méthode `sasirTexte()` pourra être invoquée. A ce niveau il est à noter qu'un attribut d'objet peut être lu et modifié par une fonction appliquée à l'objet. Ces fonctions particulières, les accesseurs, ont, par exemple, en Java une syntaxe particulière. Leur signature doit suivre le modèle : `get[nom de l'attribut]()` pour une fonction d'accès à un attribut et `set[nom de l'attribut]()` pour une fonction d'initialisation de l'attribut. Par exemple, si un objet possède deux attributs `name` et `function`, les accesseurs auront pour noms : `getName()`, `setName()`, `getFunction()`, `setFunction()`. Les utilisateurs Java ou C++ ont aussi peut être déjà vu le modificateur protégé en plus des modes privé et public. Nous reviendrons sur ce modificateur dans la partie consacré au langage Java en nous ramenant à chaque fois au cas privé.

Le concept de type de données abstrait est bien connu dans les langages de programmation. Un type de données abstrait peut être vu comme un ensemble de fonctions qui cache la représentation d'un objet et contraint les interactions de l'objet avec les autres objets. Ainsi, un type de données abstrait englobe une représentation cachée d'un objet et une collection de fonctions abstraites visibles à l'extérieur. La définition d'un type de données correspond à la définition d'une ou plusieurs interfaces, comme vues ci-dessus. L'emploi de types abstrait favorise la modularité des programmes car la modification de la structure d'un objet n'affecte pas les objets extérieurs qui le manipulent. Dans les systèmes à objets, les types abstraits (et donc les interfaces) doivent être implémentés sous la forme d'un module permettant de définir les attributs et les méthodes communs associés aux objets créés selon ce module. Un tel module est appelé classe.

**Définition 30** *Une classe est l'implantation d'une ou plusieurs interfaces sous la forme d'un module permettant de spécifier un ensemble de propriétés d'objets (attributs et méthodes) et de créer des objets possédants ces propriétés [45].*

Une classe spécifie la structure et le comportement des objets qu'elle permet de créer. Elle donne également naissance à une famille d'objets : on parle alors d'extension de la classe. Cette extension est une collection d'objets ayant même structure et comportement. Par abus de langage, le terme de classe est utilisé pour désigner à la fois l'implantation d'un type d'objet mais aussi l'extension d'une classe.

### 3.5.2 Héritage et polymorphisme

Afin d'éviter la répétition de toutes les propriétés pour chaque classe d'objets et de modéliser la relation d'héritage « est une sorte de » entre objets, il est possible de définir de nouvelles classes par affinage de classes plus générales. Cette possibilité est importante afin de synthétiser les structures et comportements des objets et de tendre un ensemble de classes plus cohérent. La notion de généralisation est ainsi introduite d'après les travaux de [49, 18].

**Définition 31** *La généralisation est un lien hiérarchique entre deux classes spécifiant que les objets de la classe supérieure sont plus généraux que ceux de la classe inférieure.*

La classe inférieure est appelée sous-classe, la classe supérieure est appelée super-classe. Le parcours du lien de la super-classe vers la sous-classe correspond à une spécialisation, inverse de la généralisation. Une sous-classe reprend les attributs et les méthodes des classes plus générales. Cette notion est appelée héritage.

**Définition 32** *L'héritage est la transmission automatique des propriétés d'une super-classe de base vers une sous-classe.*

Il existe différentes sémantiques de la généralisation et de l'héritage qui sont deux concepts associés [21, 59]. La plus courante est de considérer que tout objet d'une classe est aussi un objet d'une classe plus générale. Il hérite à ce titre des attributs et méthodes de la classe supérieure. La relation de généralisation est alors une relation d'inclusion. Bien que reprenant les attributs et méthodes de la classe supérieure, la sous-classe possède

des attributs ou méthodes supplémentaires, c'est la spécialisation. La relation d'héritage entre classes peut être utilisée pour représenter une taxinomie. Dans ce cas, une classe ne peut avoir qu'une seule super-classe.

Lors de la définition d'une hiérarchie de classes, certaines propriétés peuvent être spécifiées différemment pour chaque sous-classe. Cette idée repose sur la capacité à modéliser une méthode de signature similaire mais d'implantation différente. Il s'agit de la redéfinition.

**Définition 33** *La redéfinition est la spécialisation d'une méthode existante dans une super-classe au niveau d'une sous-classe avec une implantation différente [46].*

Pour une même classe, il est aussi possible de définir plusieurs implantations pour une même méthode. Chacune est alors distinguée par une signature différente au niveau des paramètres. Cette notion s'appelle surcharge.

**Définition 34** *La surcharge est la possibilité de définir plusieurs codes pour une même méthode d'une classe. L'implantation appropriée étant sélectionnée selon le type des paramètres fournis [46].*

La possibilité de surcharge rend nécessaire le choix de l'implantation d'une méthode en fonction de ses arguments. Ceci peut se généraliser car en effet une méthode d'un nom donné peut avoir différentes signatures. Une implantation est alors attachée à chaque signature. Cette possibilité peut être utilisée pour gérer des valeurs par défaut de paramètre. La surcharge et la redéfinition forment le polymorphisme qui peut être défini par :

**Définition 35** *Le polymorphisme est la faculté pour une méthode d'avoir différentes signatures avec une implantation spécifique attachée à chaque signature [46].*

Le polymorphisme permet donc à une même opération de s'appliquer à des objets de différentes classes ou à des objets d'une même classe. Dans ce dernier cas, les paramètres de l'opération doivent être de types différents. En particulier, certains peuvent ne pas exister.

## **Deuxième partie**

# **Fusion de croyances dans le cadre propositionnel**



## Introduction

La fusion de croyances dans le cadre de la logique propositionnelle est un problème largement traité dans la littérature [13, 53, 50, 17].

Bien que de nombreuses méthodes de fusion aient été proposées, la plupart des avancées dans ce domaine concernent de nouvelles stratégies de fusion ou encore de nouveaux algorithmes pour optimiser les processus. Cependant, dans le cadre d'application réelle, la conservation d'informations est très importante. Si la fusion permet d'extraire des informations de sources différentes, il n'existe pas de processus permettant de retrouver à partir d'un ensemble d'informations fusionnées les informations originelles. Le développement de processus de fusion réversible est donc un problème ouvert.

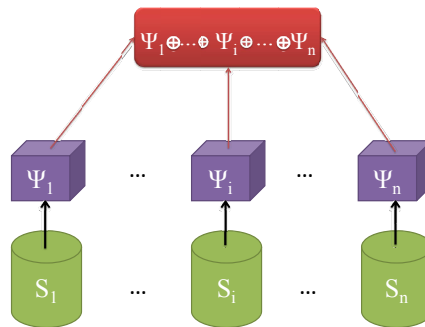


FIG. 3.3 – Schéma de la fusion en logique propositionnelle.

Nous proposons dans cette partie notre contribution par la mise en place d'un cadre réversible pour la fusion d'états épistémiques inspiré du cadre réversible pour la révision développé par Odile Papini et Salem Benferhat [14]. La caractéristique principale de ce cadre est de permettre de retrouver à partir d'un ensemble de croyances fusionnées les croyances originelles par l'intermédiaire d'un historique. Une autre caractéristique est de proposer une méthode permettant d'exprimer des opérateurs de fusions déjà définis (comme les opérateurs à base de distances) et ainsi d'apporter la réversibilité à des processus de fusions tout en conservant leur caractéristiques. Après un état de l'art sur la fusion proposé au chapitre 4, nous présentons tout d'abord dans le chapitre 5 la re-

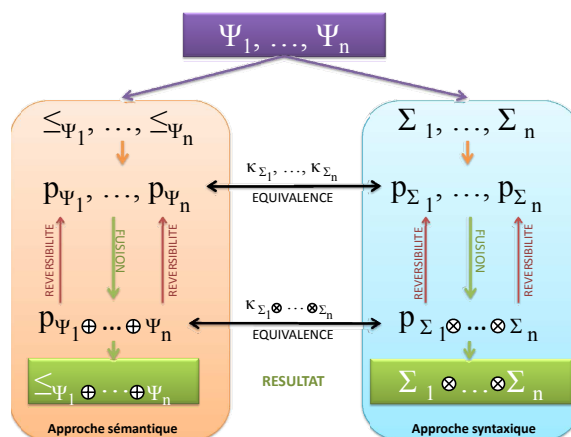


FIG. 3.4 – Cadre réversible pour la fusion.

présentation de pré-ordres par des polynômes. Nous développons ensuite la représentation d'états épistémiques dans le cadre propositionnel au chapitre 6. Nous présentons enfin dans le chapitre 7 le cadre réversible dans lequel est exprimée la fusion dans l'approche sémantique et syntaxique. Pour chacune des approches la réversibilité est explicitée. Nous décrivons ensuite l'équivalence de la fusion dans l'approche sémantique et dans

---

l'approche syntaxique. Finalement, la généralisation de notre cadre à la fusion à base de distance ainsi qu'à la révision réversible est présentée au chapitre 8.

## Chapitre 4

# État de l'art

### Contents

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>40</b>
<b>4.2</b>	<b>Fusion de croyances</b>	<b>40</b>
<b>4.3</b>	<b>Fusion avec contraintes d'intégrité</b>	<b>41</b>
4.3.1	Familles d'opérateurs	42
4.3.2	Théorème de représentation	42
<b>4.4</b>	<b>Différentes approches de la fusion</b>	<b>43</b>
4.4.1	Fusion sans priorité de bases	43
4.4.2	Fusion avec priorités implicites	44
4.4.3	Fusion avec priorités explicites	47
<b>4.5</b>	<b>Fusion en logique possibiliste</b>	<b>48</b>
4.5.1	Fusion de bases possibilistes	48

---



## 4.1 Introduction

L'étude de la fusion d'informations est un problème important qui fait l'objet de nombreux travaux [13, 53, 50, 17]. Nous présentons ici un état de l'art s'intéressant particulièrement à la fusion de croyances représentées par des bases propositionnelles. Le formalisme de la logique propositionnelle utilisé ici est détaillé en section 2.1, page 18.

## 4.2 Fusion de croyances

La fusion de croyances provenant de différentes sources est un problème qui suscite de nombreuses recherches dans les domaines notamment de l'intelligence artificielle et des bases de données [5, 23]. La fusion est l'extraction du maximum de croyances provenant de sources, pour les réunir dans ce que l'on appelle la base de croyances fusionnée. Formellement, on peut représenter la fusion comme un opérateur sur un ensemble  $E = \{K_1, \dots, K_n\}$  de croyances représentant les croyances de  $n$  agents sur un ensemble de sources d'information  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Chaque base  $K_i$  est une formule propositionnelle, ou plus généralement un ensemble fini de formules propositionnelles  $\phi_{i,j}$ . Avant de décrire le fonctionnement de la fusion d'informations, nous rappelons certaines propriétés des ensembles de croyances. Ces propriétés sont détaillées dans [52, 53].

**Rappel 1** Soit  $E = \{K_1, \dots, K_n\}$  un ensemble de croyances. On note  $\bigwedge E$  la conjonction de toutes les bases de croyances définie par  $\bigwedge E = K_1 \wedge \dots \wedge K_n$ . Cette notation représentant de manière implicite la conjonction des formules  $\phi_{i,j}$  de chaque  $K_i$

**Rappel 2** Un ensemble de croyances  $E$  est dit cohérent si et seulement si  $\bigwedge E$  est cohérente. Nous nous autorisons l'abus d'écriture  $\text{Mod}(E)$  à la place de  $\text{Mod}(\bigwedge E)$  pour simplifier la notation.

**Rappel 3** Soit  $E_1, E_2$  deux ensembles de croyances.  $E_1$  et  $E_2$  sont équivalents si et seulement si il existe une bijection  $f$  de  $E_1 = \{K_1^1, \dots, K_n^1\}$  dans  $E_2 = \{K_1^2, \dots, K_n^2\}$  définie telle que  $\models f(K_i^1) \leftrightarrow K_i^2$ .

**Rappel 4** Soit  $\oplus$  un opérateur de fusion de bases de croyances et soit  $E = \{K_1, \dots, K_n\}$  un ensemble de croyances. On note  $\Delta(E)$  la base fusionnée définie par :  $\Delta(E) = K_1 \oplus \dots \oplus K_n$ . L'opérateur peut être indifféremment noté  $\Delta$  ou  $\oplus$  dans les travaux relatifs à la fusion.

L'opérateur  $\Delta$  représente le mécanisme de fusion utilisé de façon à extraire le maximum d'informations des différentes sources. Il existe de nombreuses méthodes différentes pour arriver à cette sélection, mais des propriétés générales ont été proposées pour que l'opérateur utilisé conserve un comportement rationnel lors de la fusion. Ces propriétés sont rassemblées sous forme d'un ensemble de six postulats proposés par S. Konieczny et R. Pino-Perez [53] que nous rappelons ici.

**Rappel 5** Soit  $E, E_1, E_2$  trois ensembles de croyances et soit  $K, K'$  deux bases de croyances,  $\Delta$  est un opérateur de fusion si et seulement si il vérifie les postulats suivants :

- (KP1)  $\Delta(E)$  est cohérente
- (KP2) Si  $E$  est cohérent, alors  $\Delta(E) = \bigwedge(E)$
- (KP3) Si  $E_1 \leftrightarrow E_2$ , alors  $\models \Delta(E_1) \leftrightarrow \Delta(E_2)$
- (KP4) Si  $K \wedge K'$  n'est pas cohérente, alors  $\Delta(K \cup K') \not\models K$
- (KP5)  $\Delta(E_1) \wedge \Delta(E_2) \models \Delta(E_1 \cup E_2)$
- (KP6) Si  $\Delta(E_1) \wedge \Delta(E_2)$  est cohérente, alors  $\Delta(E_1 \cup E_2) \models \Delta(E_1) \wedge \Delta(E_2)$ <sup>1</sup>

Ces Six postulats sont les propriétés basiques qu'un opérateur de fusion doit satisfaire. Le postulat (KP1) impose que la base fusionnée soit cohérente pour pouvoir fournir des informations. En cas d'incohérence de la base fusionnée, n'importe quelle croyance pourrait en être déduite ce qui entraînerait la perte totale des informations extraites des sources. Si toutes les bases de croyances  $K_i$  sont cohérentes alors on doit extraire toute les informations des sources. Formellement cela se traduit par (KP2) qui stipule que la base fusionnée est la conjonction de toutes les croyances de l'ensemble  $E$ . (KP3) exprime que l'opérateur  $\Delta$  obéit au principe d'indépendance par rapport à la syntaxe. En effet, si deux ensembles de croyances apportent les mêmes informations, décrites

cependant différemment, alors la fusion de ces deux ensembles doit donner le même résultat. Cette notion peut être explicitée de manière plus rigoureuse en posant que si deux ensembles de croyances sont équivalents, au sens de la définition 4, alors les deux bases de croyances issues de la fusion sont elles aussi équivalentes, mais cette fois ci au sens logique. Le postulat (KP4) donne à l'opérateur de fusion un rôle égalitaire. Il ne faut pas que l'opérateur privilégie l'une ou l'autre des bases de manière implicite, ce qui se traduit par la non inclusion des modèles de la base fusionnée dans les modèles de l'une des bases de croyances. Les deux derniers postulats ont été énoncés pour la première fois dans [74] par Revesz et ont été intégrés aux postulats KP. (KP5) impose que si des croyances sont communes à deux ensembles, alors ces croyances doivent apparaître dans la fusion de ces deux ensembles. A eux deux, (KP5) et (KP6) expriment que si deux ensembles de croyances ont un seul modèle en commun, alors ce modèle doit aussi être modèle de la base fusionnée et doit être le seul. Il est ajouté à ces six postulats fondamentaux deux postulats caractérisant les opérateurs d'arbitrage et de majorité :

$$\begin{aligned} (M7) \quad & \forall K \exists n \Delta(K \cup K^n) \models K & \text{(Majorité)} \\ (A'7) \quad & \forall K \forall n \Delta(E \cup K_n) & \text{(Arbitrage)} \end{aligned}$$

Ces deux postulats caractérisent des opérateurs de fusion spécifiques, un opérateur n'a pas à les respecter pour être qualifié d'opérateur de fusion. Ces deux opérateurs ne peuvent être simultanément satisfaits par des opérateurs vérifiant (KP1)-(KP6). (M7) implique l'utilisation de la majorité. En effet, plus une croyance apparaît dans un ensemble, plus elle doit être prise en compte. Un opérateur respectant (M7) est dit majoritaire. Inversement, (A'7) stipule qu'il ne faut pas prendre en compte la répétition dans un ensemble de croyances et caractérise les opérateurs dits d'arbitrage. Les six postulats (KP1)-(KP6) présentés ici permettent de caractériser un opérateur de fusion, cependant, certains d'entre eux ne les respectent pas tous les six mais sont néanmoins considérés comme des opérateurs de fusion acceptables. Les deux postulats (M7) et (A'7) de spécialisation sont quant à eux différents, en effet il est démontré dans [53] que les opérateurs satisfaisant (M7) ne peuvent satisfaire (KP2) et (A'7). Ceux satisfaisant (KP4) ne peuvent satisfaire (M7) et (A'7). Maintenant les opérateurs de fusion caractérisés (nous incluons ici dans les opérateurs de fusion acceptables), nous pouvons nous intéresser aux techniques de construction de ces opérateurs et aux différentes méthodes de sélection de croyances. Afin de faire cette sélection, il est nécessaire de définir différentes techniques.

### 4.3 Fusion avec contraintes d'intégrité

La formulation de la fusion comme elle a été décrite précédemment a été enrichie de nombreux travaux. [56, 57, 53, 73, 74, 52]. Ces méthodes n'imposent aucune contraintes sur la fusion qui a comme résultat l'ensemble des interprétations qui se rapprochent le plus de l'ensemble des bases de croyances originales. Les postulats de la fusion ont depuis été étendus [54] afin de proposer des techniques de fusion plus générales où le résultat doit obéir à des contraintes d'intégrité. Les postulats *KP* étendus à la fusion avec contrainte d'intégrité sont :

0.  $\Delta_{IC}(E) \vdash IC$ .
1. Si  $IC$  est cohérente, alors  $\Delta_{IC}(E)$  est cohérente.
2. Si  $E$  est cohérente avec  $IC$ , alors  $\Delta_{IC}(E) = \bigwedge E \wedge IC$ .
3. Si  $E_1 \equiv E_2$  et  $IC_1 \equiv IC_2$ , alors  $\Delta_{IC_1}(E_1) \equiv \Delta_{IC_2}(E_2)$ .
4. Si  $K_1 \vdash IC$  et  $K_2 \vdash IC$ , alors  $\Delta_{IC}(K_1 \sqcup K_2) \wedge K_1 \not\vdash \perp \Rightarrow \Delta_{IC}(K_1 \sqcup K_2) \wedge K_2 \not\vdash \perp$ .
5.  $\Delta_{IC}(E_1) \wedge \Delta_{IC}(E_2) \vdash \Delta_{IC}(E_1 \sqcup E_2)$ .
6. Si  $\Delta_{IC}(E_1) \wedge \Delta_{IC}(E_2)$  est cohérente, alors  $\Delta_{IC}(E_1 \sqcup E_2) \vdash \Delta_{IC}(E_1) \wedge \Delta_{IC}(E_2)$ .
7.  $\Delta_{IC_1}(E) \wedge IC_2 \vdash \Delta_{IC_1 \wedge IC_2}(E)$ .
8. Si  $\Delta_{IC_1}(E) \wedge IC_2$  est cohérente, alors  $\Delta_{IC_1 \wedge IC_2}(E) \vdash \Delta_{IC_1}(E) \wedge IC_2$ .

Les postulats sont tels que : 0 stipule que le résultat de la fusion satisfait les contraintes d'intégrités. Le postulat 1 indique que le résultat de la fusion doit être cohérent si les contraintes d'intégrité sont cohérentes. 2 est tel que si la conjonction des bases de croyances est cohérente, il s'agit alors du résultat de la fusion. Selon 3, la fusion est indépendante de la syntaxe. Si deux ensembles de bases de croyances sont logiquement indépendantes, alors le résultat de la fusion doit être le même. 4 stipule qu'aucune priorité ne doit être donnée

à des bases de croyances. 5 et 6 sont liés. Ils indiquent que si il existe deux sous groupes qui sont d'accord sur au moins une alternative, alors cette alternative doit apparaître dans le résultat de la fusion. Les postulats 7 et 8 sont la traduction directe des postulats AGM [2] (R5) et (R6), qui définissent la notion de fermeture.

### 4.3.1 Familles d'opérateurs

Comme nous l'avons vu précédemment, Konieczny and Pino Perez on proposé de diviser les opérateurs de fusion en deux classes : les opérateurs de majorité et les opérateurs d'arbitrage [53]. Cette distinction est également étendue dans le cadre de la fusion avec contraintes d'intégrité.

**Définition 36 (Majorité)** *Un opérateur de fusion  $\Delta$  est un opérateur de majorité si et seulement si*

$$\exists n, \Delta_{IC}(K_1 \sqcup K_2^n) \vdash \Delta_{IC}(K_2) \quad (\text{Maj})$$

**Définition 37 (Arbitrage)** *Un opérateur de fusion  $\Delta$  est un opérateur d'arbitrage si et seulement si*

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{IC_1}(K_1) \equiv \Delta_{IC_2}(K_2) \\ \Delta_{IC_1 \leftrightarrow \neg IC_2}(K_1 \sqcup K_2) \equiv (IC_1 \leftrightarrow \neg IC_2) \\ IC_1 \not\models IC_2 \\ IC_2 \not\models IC_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta_{IC_1 \vee IC_2}(K_1 \sqcup K_2) \equiv \Delta_{IC_1}(K_1) \quad (\text{Arb})$$

Un autre propriété exclusive avec la propriété de majorité est l'indépendance à la majorité. Les opérateurs indépendants à la majorité ne prennent pas en compte la popularité d'une opinion. C'est à dire que la redondance d'une croyance n'influe pas sur le résultat de la fusion.

**Définition 38 (Indépendance à la majorité)** *Un opérateur de fusion  $\Delta$  est indépendant à la majorité si et seulement si*

$$\forall n, \Delta_{IC}(E_1 \sqcup E_2^n) \leftrightarrow \Delta_{IC}(E_1 \sqcup E_2) \quad (\text{MI})$$

### 4.3.2 Théorème de représentation

Un autre moyen de représenter les postulats de la fusion est un théorème de représentation qui donne une vision plus intuitive des opérateurs grâce à un pré-ordre sur les interprétations. C'est la définition de l'assignation synchrétique [54].

**Définition 39 (Assignation synchrétique)** *Une assignation synchrétique est une fonction qui fait correspondre à chaque ensemble de bases de croyances  $E$  un pré-ordre, noté  $\leq_E$ , sur l'ensemble des interprétations  $\mathcal{W}$  tel que pour chaque ensemble de bases de croyances  $E, E_1, E_2$  et pour chaque base de croyances  $K_1, K_2$  les conditions suivante sont satisfaites :*

1. Si  $\omega \models E$  et  $\omega' \models E$ , alors  $\omega \simeq_E \omega'$
2. Si  $\omega \models E$  et  $\omega' \not\models E$ , alors  $\omega <_E \omega'$
3. Si  $E_1 \leftrightarrow E_2$ , alors  $\leq_{E_1} = \leq_{E_2}$
4.  $\forall \omega \models K_1, \exists \omega' \models K_2$ , alors  $\omega \leq_{K_1 \sqcup K_2} \omega'$
5. Si  $\omega \leq_{K_1} \omega'$  et  $\omega \leq_{K_2} \omega'$ , alors  $\omega \leq_{K_1 \sqcup K_2} \omega'$
6. Si  $\omega <_{K_1} \omega'$  et  $\omega \leq_{K_2} \omega'$ , alors  $\omega <_{K_1 \sqcup K_2} \omega'$

Les propriétés de majorité et d'arbitrage sont définies de la même manière.

**Définition 40** *Une assignation synchrétique majoritaire est un assignement synchrétique qui satisfait :*

7. Si  $\omega <_{E_2} \omega'$  alors  $\exists n, \omega <_{E_1 \sqcup E_2^n} \omega'$

**Définition 41** *Une assignation synchrétique d'arbitrage est une assignation synchrétique qui satisfait :*

8.  $\left. \begin{array}{l} \omega <_{K_1} \omega' \\ \omega <_{K_2} \omega'' \\ \omega' \equiv_{K_1 \sqcup K_2} \omega'' \end{array} \right\} \Rightarrow \omega <_{K_1 \sqcup K_2} \omega'$

S.Konieczny a montré que  $\Delta$  est un opérateur de fusion (c'est à dire qu'il satisfait tous les postulats KP) si et seulement si il existe une assignation syncrétique qui fait correspondre à chaque ensemble de bases de croyances  $E$  un pré-ordre  $\leq_E$  tel que  $\text{mod}(\Delta_{IC}(E)) = \min(\text{mod}(IC), \leq_E)$ . La même équivalence est démontrée entre les opérateurs de fusion à majorité et une assignation syncrétique majoritaire ainsi qu'entre un opérateur de fusion d'arbitrage et une assignation syncrétique d'arbitrage..

## 4.4 Différentes approches de la fusion

Plusieurs approches de fusion d'informations ont été proposées durant ces dernières années. Nous présentons ici les trois plus importantes : la fusion sans priorités, la fusion avec priorités implicites, puis la fusion avec priorités explicites.

### 4.4.1 Fusion sans priorité de bases

#### Approche naïve

Lorsque qu'un ensemble de bases de croyances  $E = \{K_1, \dots, K_n\}$  est tel que  $\bigcup_{K_i, 1 \leq i \leq n}$  est cohérent, la fusion est alors la conjonction de toutes les bases de croyances car l'ensemble des croyances disponibles forment le résultat de la fusion. Dans ce cas là cependant, aucune information relative à la redondance de croyance n'est conservée. Une approche plus prudente est de prendre comme résultat de la fusion la conjonction de toutes les bases. Cette approche ne permet pas quant à elle d'identifier les croyances partagées par plusieurs bases. Nous pouvons ajouter de plus que l'approche basée sur la disjonction entraîne un accroissement du nombre de formules dont la plupart ne sont pas utiles.

Dans le cas où  $\bigcup_{K_i, 1 \leq i \leq n}$  est incohérent, il est impossible de considérer la conjonction des bases de croyances comme le résultat de la fusion, en effet, le résultat serait alors incohérent lui aussi. Prendre comme résultat de la fusion la disjonction des bases peut être une solution si celles-ci ne sont pas trop incohérentes (c'est à dire si l'incohérence ne touche pas une trop grande partie des croyances). Dans le cas contraire, le résultat de la disjonction de bases de croyances fortement incohérentes peut entraîner des bases inutilisables, par exemple contenant des tautologies et n'apportant donc aucune information.

Plus formellement, d'un point de vue sémantique, l'opérateur de fusion appelé opérateur d'intersection totale est défini par :

**Définition 42** Soit  $E$  un ensemble de bases de croyances et soit  $IC$  une base de croyances représentant des contraintes d'intégrité. L'opérateur d'intersection totale est défini par :

$$\Delta_{IC}^{fm}(E) = \begin{cases} E \wedge IC & \text{si } E \wedge IC \text{ est cohérent} \\ IC & \text{sinon} \end{cases}$$

Cet opérateur ne satisfait pas le postulat KP6. Il est possible d'affiner cet opérateur en considérant la conjonction de bases de croyances si elles sont cohérentes et leur disjonction sinon. C'est le rôle de l'opérateur de fusion basique.

**Définition 43** Soit  $E = \{K_1, \dots, K_n\}$  un ensemble de croyances et  $IC$  une base de croyances représentant des contraintes d'intégrité. L'opérateur de fusion basique est défini par :

$$\Delta_{IC}^b(E) = \begin{cases} \bigwedge_{i \in \{1, \dots, n\}} K_i \wedge IC & \text{si cohérent ou} \\ \bigvee_{i \in \{1, \dots, n\}} K_i \wedge IC & \text{si cohérent ou} \\ IC & \text{sinon} \end{cases}$$

Le théorème suivant sur l'opérateur de fusion basique a été démontré :

**Théorème 1** L'opérateur de fusion basique satisfait les postulats KP0 à KP5 ainsi que les postulats KP7 et KP8 mais ne satisfait pas le postulat KP6 [54].

Les deux opérateurs de fusion présentés montrent très vite leur limites, particulièrement quand l'union des bases de croyances est incohérente. Des opérateurs plus adaptés ont été définis.

### Combinaison operators

Les opérateurs de combinaison sont une famille d'opérateurs de fusion syntaxique. Ils reposent tous sur la notion d'ensembles maximaux-cohérents de l'union de bases de croyances. Les premiers opérateurs de combinaison ont été proposés dans [6, 5].

**Définition 44** Soit  $K$  et  $IC$  deux bases de croyances et  $E$  un ensemble de bases de croyances. L'ensemble des sous ensembles maximaux-cohérents au sens de l'inclusion de  $K \wedge IC$  contenant  $IC$  est noté  $\text{MAXCONS}(K, IC)$ . On définit l'ensemble des sous ensembles maximaux cohérents  $\text{MAXCONS}(E, IC)$  tel que  $\text{MAXCONS}(E, IC) = \text{MAXCONS}(\bigwedge E, IC)$ . Si le critère de comparaison est la cardinalité, nous notons alors  $\text{MAXCONS}_{card}(E, IC)$  cet ensemble.

Cette définition caractérise l'ensemble maximal-cohérent de  $E$  qui satisfait  $IC$ . A partir de cette définition, les opérateurs de combinaison sont définis par :

### Définition 45

$$\begin{aligned} \Delta_{IC}^{C_1}(E) &= \text{MAXCONS}(E, IC) \\ \Delta_{IC}^{C_2}(E) &= \{M \mid M \in \text{MAXCONS}(E, \top) \text{ et } M \wedge IC \not\models \perp\} \\ \Delta_{IC}^{C_3}(E) &= \text{MAXCONS}_{card}(E, IC) \\ \Delta_{IC}^{C_4}(E) &= \begin{cases} \{M \wedge IC \mid M \in \text{MAXCONS}(E, \top), M \wedge IC \not\models \perp\} & \text{si cet ensemble n'est pas vide} \\ IC & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Les résultats de l'opérateur  $\Delta_{IC}^{C_1}(E)$  sont les ensembles maximaux-cohérents de  $E$  qui satisfont les contraintes d'intégrité  $IC$ . L'opérateur  $\Delta_{IC}^{C_2}(E)$  construit d'abord les ensembles maximaux-cohérents de  $E$  et conserve seulement ceux qui sont cohérents avec les contraintes d'intégrité. L'opérateur  $\Delta_{IC}^{C_3}(E)$  construit les ensembles maximaux-cohérents de  $E$  de cardinalité minimale qui contient les contraintes  $IC$ . Enfin, l'opérateur  $\Delta_{IC}^{C_4}(E)$  affine  $\Delta_{IC}^{C_3}(E)$  possédant plus de propriétés logiques.

Aucun des opérateurs de combinaison ne satisfait le postulat  $KP3$  car ils sont tous par définition dépendants de la syntaxe. Le théorème indique la vérification ou non des postulats  $KP$  par les opérateurs de combinaison.

**Théorème 2** Les opérateurs de combinaison sont tels que :

- L'opérateur  $\Delta_{IC}^{C_1}(E)$  vérifie  $KP0, KP1, KP2, KP4, KP5, KP7$  et  $MI$ . Il ne vérifie pas  $KP6, KP8$  et  $maj$ .
- L'opérateur  $\Delta_{IC}^{C_2}(E)$  vérifie  $KP4, KP5, KP7, KP8$  et  $MI$ . Il ne vérifie pas  $KP0, KP1, KP2, KP6$  et  $maj$ .
- L'opérateur  $\Delta_{IC}^{C_3}(E)$  vérifie  $KP0, KP1, KP2, KP7, KP8$  et  $MI$ . Il ne vérifie pas  $KP4, KP5, KP6$  et  $maj$ .
- L'opérateur  $\Delta_{IC}^{C_4}(E)$  vérifie  $KP0, KP1, KP2, KP4, KP5, KP7, KP8$  et  $MI$ . Il ne vérifie pas  $KP6$  et  $maj$ .

Il faut noter que le fait que les opérateurs de combinaison ne vérifient pas la propriété  $MI$  peut être un problème. En effet, cela signifie qu'ils ne prennent pas en compte l'origine de l'information.

### 4.4.2 Fusion avec priorités implicites

La fusion avec priorités implicites a été étudiée au niveau sémantique [20, 53]. Les opérateurs de fusion avec priorités implicites ont la propriété de passer par trois étapes lors de la création de la base fusionnée : la première étape est le calcul d'une distance locale entre les interprétations et les bases de croyances pour construire un pré-ordre sur les interprétations. La deuxième étape est l'agrégation des distances locales pour arriver à une distance globale entre les interprétations et l'ensemble de croyances pour en déduire un nouveau pré-ordre sur les interprétations. La troisième étape est la construction de la base fusionnée en utilisant le pré-ordre global de l'ensemble de croyances. Définissons les notions de distances entre interprétation et pré-ordre.

**Définition 46** On appelle pseudo-distance entre deux interprétations, notée  $d$ , une fonction  $d : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie telle que  $\forall \omega_i, \omega_j \in \mathcal{W}$

- (i)  $d(\omega_i, \omega_j) = d(\omega_j, \omega_i)$
- (ii)  $d(\omega_i, \omega_j) = 0$  si et seulement si  $\omega_i = \omega_j$

Dans le cadre de la fusion implicite,  $d$  est appelée distance au lieu de pseudo-distance bien qu'il ne soit pas nécessaire de vérifier l'inégalité triangulaire<sup>2</sup>.

Pour des interprétations en logique propositionnelle, la distance la plus utilisée la distance de Hamming, notée  $d_H$ , qui est définie comme le nombre de littéraux qui varient d'une interprétation à l'autre. Plus formellement,  $\forall \omega_i, \omega_j \in \mathcal{W}$  deux interprétations, on définit la distance de Hamming entre  $\omega_i$  et  $\omega_j$  par :  $d_H(\omega_i, \omega_j) = \#(\{l_k \in \omega_i \mid l_k \notin \omega_j\} \cup \{l_{k'} \in \omega_j \mid l_{k'} \notin \omega_i\})$ . La distance de Hamming étant une distance au sens mathématique, elle vérifie les propriétés de la définition 8. Dans le cadre d'ensemble de croyances, on appelle distance d'une interprétation  $\omega$  à une base  $K$ , ou encore distance locale, la plus petite distance entre  $\omega$  et les modèles de  $K$ . De manière formelle  $d_l(\omega, K) = \min_{\omega' \models K} d(\omega, \omega')$  où la distance  $d$  est une distance au sens de la définition 1.6 comme par exemple la distance de Hamming. Il est fréquent de ne pas faire de différence entre  $d$  et  $d_l$  dans les notations. La notion de distance locale permet d'ordonner les interprétations par rapport à chacune des bases d'un ensemble de croyances sous la forme de pré-ordres totaux.

**Définition 47** Un pré-ordre est une relation binaire  $\leq$  dans  $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$  telle que :

- (1)  $\forall \omega_i \in \mathcal{W} \omega_i \leq \omega_i$  (Réflexivité)
- (2)  $\forall \omega_i, \omega_j, \omega_k \in \mathcal{W} \{ \text{si } \omega_i \leq \omega_j \text{ et } \omega_j \leq \omega_k \text{ alors } \omega_i \leq \omega_k \}$  (Transitivité)

Un pré-ordre est qualifié de total si et seulement si  $\forall \omega_i, \omega_j \in \mathcal{W} \omega_i \leq \omega_j$  ou  $\omega_j \leq \omega_i$

Pour la fusion avec priorités implicites, deux types de pré-ordres sont utilisés. Tout d'abord les pré-ordres locaux entre chaque base de croyances  $K_i$  et les interprétations puis ensuite un pré-ordre global entre les interprétations et la base fusionnée  $\Delta(E)$ . Les pré-ordres locaux, souvent notés  $\leq_{K_i}$  pour référencer la base de croyances à laquelle ils se rapportent, sont construits à partir des distances locales  $d_l$  de manière à ce que pour deux interprétations  $\omega_i$  et  $\omega_j$ ,  $\omega_i \leq_{K_i} \omega_j$  si et seulement si  $d_l(\omega_i, K_i) \leq d_l(\omega_j, K_i)$ . La construction du pré-ordre global, noté  $\leq_\oplus$ , dépend de l'opérateur de fusion utilisé et passe par le calcul d'une distance globale  $d_\oplus(\omega, E)$  entre les interprétations  $\omega$  et l'ensemble de croyances  $E$ . La méthode utilisée pour le calcul de la distance globale ainsi que celle utilisée pour la construction du pré-ordre global forment l'opérateur de fusion. Plusieurs méthodes ont été proposées pour le calcul des distances globales, voici le rappel des plus connues dans la littérature et des plus utilisées. Pour toutes ces définitions, nous considérons la fusion d'un ensemble de croyances  $E = \{K_1, \dots, K_n\}$  en utilisant une distance locale  $d$  entre les interprétations  $\omega$  et les bases de croyances  $K_i$ .

**Définition 48** On définit l'opérateur de majorité [73], noté  $\Sigma$ , tel que :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, d_\Sigma(\omega, E) = \sum_{i=1}^n d(\omega, K_i)$$

Cette méthode d'agrégation permet de prendre en compte les interprétations compatibles avec le plus de sources possibles.

**Définition 49** On définit l'opérateur de somme pondérée [73], noté  $\mathcal{WS}$ , tel que :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, \forall K_i \in E, \exists k_i \in \mathbb{N} \quad d_{\mathcal{WS}}(\omega, E) = \sum_{i=1}^n k_i * d(\omega, K_i)$$

L'opérateur de somme pondérée possède un comportement similaire à l'opérateur  $\Sigma$ . La seule différence est que les bases n'ont pas la même importance et que chacune peut être pondérée par un entier  $k_i$ .

<sup>2</sup> $\forall \omega_i, \omega_j, \omega_k \in \mathcal{W} (iii) d(\omega_i, \omega_k) \leq d(\omega_i, \omega_j) + d(\omega_j, \omega_k)$

**Définition 50** On définit l'opérateur égalitariste idempotent [73], noté  $\mathcal{MAX}$ , tel que :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, d_{\mathcal{MAX}}(\omega, E) = \max_{i=1, \dots, n} (d(\omega, K_i))$$

Cet opérateur préfère les interprétations satisfaisant le mieux une base de croyances en particulier dans l'ensemble sans pour autant préférer une base.

**Définition 51** On définit l'opérateur égalitariste basé sur l'ordre lexicographique des maximaux, noté  $\mathcal{GMAX}$  (pour Generalized  $\mathcal{MAX}$ ) [53], tel que :

$$d_{\mathcal{GMAX}}(\omega, E) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall j, 1 \leq j \leq n, \exists i \in \mathbb{N}, \text{ tel que } x_j = d(\omega, K_i) \\ \text{et } \forall k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq j-1 \text{ on a } x_k \leq x_j$$

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, d_{\mathcal{GMAX}}(\omega, E) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i, j, k \in \mathbb{N}, i \leq k, x_i = d(\omega, K_j) \text{ ssi } x_i \leq x_k$$

Cette distance est un vecteur composé du classement par ordre croissant des distances locales.

A partir de ces distances globales, Un pré-ordre global est construit de la même façon que pour un pré-ordre local, c'est à dire que pour deux interprétations  $\omega_i$  et  $\omega_j$ ,  $\omega_i \leq_{\oplus} \omega_j$  si et seulement si  $d_{\oplus}(\omega_i, E) \leq d_{\oplus}(\omega_j, E)$ . Il est à noter que  $\Sigma$ ,  $\mathcal{WS}$  et  $\mathcal{MAX}$  utilisent l'ordre classique sur  $\mathbb{R}$ . Cependant, du fait de sa particularité d'utiliser des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{GMAX}$  utilise l'ordre lexicographique sur les vecteurs comme comparaison entre les distances globales. L'ordre lexicographique est la comparaison de chaque composante de même indice de deux vecteurs de même taille en prenant comme vecteur le plus grand le premier qui à une composante plus grande que celle de l'autre dans l'ordre croissant des indices. La construction de la base fusionnée  $\Delta(E)$  est alors obtenue en sélectionnant les interprétations minimales suivant le pré-ordre global, c'est à dire :  $Mod(\Delta(E)) = \{\omega \in \mathcal{W} \mid \omega \in \min(\mathcal{W}, \leq_{\oplus})\}$ . La base fusionnée peut être assimilée à un ensemble d'interprétations, ceci caractérise l'approche sémantique de fusion. L'exemple suivant permet de faire un point sur la fusion implicite sémantique.

**Exemple 1** Cet exemple est tiré de [13]. On considère une situation comportant une salle avec une porte, un chat, et une souris. Soient  $c$ ,  $s$ ,  $f$ , et  $p$  quatre variables propositionnelles qui représentent respectivement les informations : "Le chat est dans la salle", "La souris est dans la salle", "la souris est effrayée" et "la porte est ouverte". Trois sources d'informations s'expriment sur la situation :  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ . La première source fournit comme informations : "un chat ou bien une souris non effrayée", la deuxième "Une porte ouverte avec la présence du chat ou de la souris dans la salle", la troisième enfin indique que "La porte est ouverte et la salle est vide". A partir des sources on construit un ensemble de croyances  $E = \{K_1, K_2, K_3\}$  constitué de trois bases de croyances correspondant à chaque source. Les bases contiennent la croyance formalisée à partir des informations données par la source à laquelle elle est rattachée, ainsi  $K_1 = (s \wedge \neg f) \vee c$ ,  $K_2 = (s \vee c) \wedge p$  et  $K_3 = \neg c \wedge \neg s \wedge p$ . Le tableau 1 montre les distances locales et globales calculées à l'aide des opérateurs  $\Sigma$ ,  $\mathcal{WS}$ ,  $\mathcal{MAX}$  et  $\mathcal{GMAX}$ . On suppose les bases pondérées respectivement par trois entiers  $k_1 = k_2 = 1$  et  $k_3 = 3$  choisis arbitrairement pour la fusion avec  $\mathcal{WS}$ , la distance utilisée pour le calcul des distances locales étant la distance de Hamming. La lecture du tableau est assez intuitive, les colonnes sous les distances locales permettent d'observer les pré-ordres locaux. Chaque colonne sous un opérateur permet de voir les distances globales et d'en déduire le pré-ordre global associé à chaque opérateur de fusion. On remarque que chaque opérateur va sélectionner des interprétations différentes.  $\Sigma$  choisit les solutions  $\omega_9, \omega_{10}, \omega_{13}$  satisfaisant une majorité de bases. L'opérateur  $\mathcal{WS}$  choisit quant à lui  $\omega_8$  et  $\omega_{12}$  car ce sont les interprétations qui satisfont  $K_3$  dont le poids est le plus important.  $\mathcal{MAX}$  et  $\mathcal{GMAX}$  correspondent à une autre approche. Ces deux opérateurs mettent en évidence la distance maximum entre une interprétation et une des bases de croyances. Ceci permet d'éviter de choisir des interprétations trop incompatibles avec certaines croyances, même si elles satisfont plusieurs autres bases de croyances. On remarque de plus que  $\mathcal{GMAX}$  affine les résultats obtenus avec  $\mathcal{MAX}$ . Au final, on se retrouve avec les bases fusionnées  $\Delta_{\Sigma}(E)$ ,  $\Delta_{(\mathcal{WS})}(E)$ ,  $\Delta_{(\mathcal{MAX})}(E)$  et  $\Delta_{(\mathcal{GMAX})}(E)$  correspondantes chacune à un type de fusion différent. Chaque opérateur convient à une stratégie de sélection d'informations, et donc d'extraction d'information depuis les sources, qui peut être adaptée à certains cas mais très inadaptée pour d'autre. Le choix du bon opérateur à utiliser est primordial pour garantir un résultat adéquat.

$\omega$	$d(\omega, K_1)$	$d(\omega, K_2)$	$d(\omega, K_3)$	$\Sigma$	$\mathcal{MAX}$	$\mathcal{WS}$	$\mathcal{GMAX}$
$\omega_0 = \{\neg p, \neg f, \neg s, \neg c\}$	1	2	1	4	2	6	(2, 1, 1)
$\omega_1 = \{\neg p, \neg f, \neg s, c\}$	0	1	2	3	2	7	(2, 1, 0)
$\omega_2 = \{\neg p, \neg f, s, \neg c\}$	0	1	2	3	2	7	(2, 1, 0)
$\omega_3 = \{\neg p, \neg f, s, c\}$	0	1	3	4	3	10	(3, 1, 0)
$\omega_4 = \{\neg p, f, \neg s, \neg c\}$	1	2	1	4	2	6	(2, 1, 1)
$\omega_5 = \{\neg p, f, \neg s, c\}$	0	1	2	3	2	7	(2, 1, 0)
$\omega_6 = \{\neg p, f, s, \neg c\}$	1	1	2	4	2	8	(2, 1, 1)
$\omega_7 = \{\neg p, f, s, c\}$	0	1	3	4	3	10	(3, 1, 0)
$\omega_8 = \{p, \neg f, \neg s, \neg c\}$	1	1	0	2	1	2	(1, 1, 0)
$\omega_9 = \{p, \neg f, \neg s, c\}$	0	0	1	1	1	3	(1, 0, 0)
$\omega_{10} = \{p, \neg f, s, \neg c\}$	0	0	1	1	1	3	(1, 0, 0)
$\omega_{11} = \{p, \neg f, s, c\}$	0	0	2	2	2	6	(2, 0, 0)
$\omega_{12} = \{p, f, \neg s, \neg c\}$	1	1	0	2	1	2	(1, 1, 0)
$\omega_{13} = \{p, f, \neg s, c\}$	0	0	1	1	1	3	(1, 0, 0)
$\omega_{14} = \{p, f, s, \neg c\}$	1	0	1	2	1	4	(1, 1, 0)
$\omega_{15} = \{p, f, s, c\}$	0	0	2	2	2	6	(2, 0, 0)

TAB. 4.1 – Représentation du calcul des distances locales et globales pour les opérateurs de fusion  $\Sigma$ ,  $\mathcal{WS}$ ,  $\mathcal{MAX}$ ,  $\mathcal{GMAX}$

### 4.4.3 Fusion avec priorités explicites

La fusion avec priorités explicites peut être vue comme une généralisation de la fusion avec priorités implicites. En effet, on ne considère que les pré-ordres locaux et globaux sans se soucier de la manière dont ils sont obtenus. Le travail en fusion avec priorités explicites est de trouver un moyen de représenter les pré-ordres car ils ne sont plus induits à partir de distances comme dans le cadre de la fusion avec priorités implicites. Deux approches de la fusion avec priorités explicites sont présentées. Une approche sémantique, basée sur l'étude des interprétations du calcul propositionnel, est présentée dans la cadre général puis une approche syntaxique dans le cas où les bases de croyances sont constituées de littéraux, ce qui le cas pour notre application.

#### Approche sémantique de la fusion avec priorités explicites

L'approche sémantique de la fusion avec priorités explicites est proche de la fusion avec priorités implicites. Le but est toujours de fusionner un ensemble de croyances  $E = \{K_1, \dots, K_n\}$  en utilisant des pré-ordres locaux, notés  $\leq_{K_i}$ , pour construire un pré-ordre global, noté  $\leq_{\oplus}$ , dépendant de l'opérateur de fusion  $\oplus$  choisi, qui permet de sélectionner les interprétations préférées décrivant la base fusionnée  $\Delta(E)$ . Afin de créer les pré-ordres, on pondère chaque interprétation par un élément  $\gamma$  provenant d'un ensemble  $\Gamma$  ordonné par un pré-ordre total  $\leq_{\Gamma}$ . A chaque base de croyances  $K_i$  correspond un ensemble  $\Gamma_{K_i}$  permettant de représenter le pré-ordre local  $\leq_{K_i}$  lui étant associé. Cependant, il est souvent plus sage de travailler sur la même structure  $\Gamma$  lors du calcul des pré-ordres locaux et globaux. En effet, choisir pour chaque pré-ordre local un ensemble  $\Gamma$  différent pourrait conduire à un problème d'échelle lors du calcul du pré-ordre global, l'agrégation des pré-ordres locaux perdrait toute rationalité si les ensembles sur lesquels les comparaisons sont effectuées sont trop différents. On définit la relation de pré-ordre par :  $\forall (\omega, \gamma), (\omega', \gamma') \in \mathcal{W} \times \Gamma$   $\omega \leq_{K_i} \omega'$  si et seulement si  $\gamma \leq_{\Gamma_{K_i}} \gamma'$ . Une fois les pré-ordres locaux représentés, il reste à définir un pré-ordre global sur les interprétations. Comme dans le cadre de fusion avec priorité implicite, c'est l'opérateur de fusion qui permet de construire le pré-ordre global. Il n'est pas nécessaire de redéfinir des opérateurs sémantiques spécifiques, en effet, l'extension des opérateurs de fusion présentés en 4.4.2 à des ensembles ordonnés (et pas seulement à  $\mathbb{R}^+$ ) permet leur utilisation lors de la fusion avec priorité explicite. Il suffit que les ensembles de poids  $\Gamma$  choisis aient une structure adaptée à chaque opérateur. Pour simplifier les notations de poids associés à une interprétation on utilise la notation  $\gamma(\omega)$  qui à chaque interprétation  $\omega \in \mathcal{W}$  fait correspondre son poids  $\gamma \in \Gamma$ . Plusieurs pré-ordres étant utilisés, on utilise une notation indicée comme  $\gamma_{K_i}(\omega)$  pour le poids de l'interprétation  $\omega$  dans le pré-ordre local de la base  $K_i$  ou encore  $\gamma_{\oplus}(\omega)$  et  $\gamma_E(\omega)$  pour le poids de  $\omega$  dans le pré-ordre global. Avant de définir quelques opérateurs de



fusion explicite, il faut énoncer des propriétés permettant aux opérateurs de respecter certains postulats sur la fusion et ainsi de garder un comportement rationnel. Les opérateurs  $\oplus$  doivent respecter :

- (1)  $\forall \omega \in \mathcal{W}$ , si  $\gamma_{K_1}(\omega) = \dots = \gamma_{K_n}(\omega) = 0$ , alors  $\gamma_E(\omega) = 0$  (cohérence)
- (2)  $\forall \omega_i, \omega_j \in \mathcal{W}$ ,  $\forall K_i \in E$ , si  $\gamma_{K_i}(\omega_i) \leq_{K_i} \gamma_{K_j}(\omega_j)$ , alors  $\gamma_E(\omega_i) \leq_{\oplus} \gamma_E(\omega_j)$  (monotonie)
- (3) L'opérateur de fusion  $\oplus$  de calcul des poids globaux doit être associatif (associativité)

La propriété de cohérence (1) permet d'obliger un opérateur de fusion à préférer une interprétation si elle est modèle de toutes les bases de croyances. La propriété de monotonie (2) entraîne une préservation des préférences. Si une interprétation est rejetée par une majorité de bases de croyances par rapport à une autre interprétation, alors celle-ci doit être également rejetée de la même manière par la base fusionnée. La dernière propriété (3) impose grâce à l'associativité de ne pas avoir d'ordre sur les bases de croyances lors de la fusion. Fusionner les bases suivant n'importe quel ordre doit amener au même résultat. On peut maintenant définir les opérateurs étendus à la fusion avec priorité explicite.

**Définition 52** On définit l'opérateur de majorité explicite sémantique, noté  $X\Sigma$ , tel que :

$$\omega \in \mathcal{W}, \gamma_E(\omega) = \sum_{i=1}^n \gamma_{K_i}(\omega)$$

Pour être utilisable avec l'opérateur  $X\Sigma$ , l'ensemble  $\Gamma$  utilisé doit avoir une structure de groupe.

**Définition 53** On définit l'opérateur de somme pondérée explicite sémantique, noté  $X\mathcal{WS}$ , tel que :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, \forall K_i \in E, \exists k_i \in \mathbb{N}, \gamma_E(\omega) = \sum_{i=1}^n k_i * \gamma_{K_i}(\omega)$$

ou  $*$  est le produit scalaire dont l'ensemble  $\Gamma$  est muni.

La restriction d'appartenance des  $k_i$  à  $\mathbb{N}$  est purement arbitraire et permet une écriture plus simple de l'opérateur de fusion, néanmoins d'autres ensembles peuvent être utilisés, comme par exemple  $\mathbb{R}$

**Définition 54** On définit l'opérateur égalitariste idempotent explicite sémantique, noté  $X\mathcal{MAX}$ , tel que :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, \gamma_E(\omega) = \max(\{\gamma_{K_1}(\omega), \dots, \gamma_{K_n}(\omega)\})$$

Pour être utilisable avec l'opérateur  $X\mathcal{MAX}$  il est simplement requis que  $\Gamma$  soit ordonné, ce qui est dans la définition même de  $\Gamma$ .

**Définition 55** On définit l'opérateur égalitariste explicite sémantique basé sur l'ordre lexicographique des maximaux, noté  $X\mathcal{GMAX}$  tel que :

$$\gamma_E(\omega) = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \Gamma^n \mid \forall j, 1 \leq j \leq n, \exists i \in \mathbb{N}, \text{tel que } \gamma_j = \gamma_{K_i} \\ \text{et } \forall k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq j-1 \text{ on a } \gamma_k \leq \gamma_j$$

L'opérateur  $X\mathcal{MAX}$  peut être utilisé si  $\Gamma^n$  est un espace vectoriel muni d'une relation d'ordre total. Il est facile de vérifier à partir de ces définitions que si l'on a  $\Gamma = \mathbb{R}^+$ ,  $\gamma_{K_i}(\omega) = d(\omega, K_i)$  et  $\gamma_E(\omega) = d(\omega, E)$  alors les opérateurs  $X\Sigma$ ,  $X\mathcal{WS}$  et  $X\mathcal{MAX}$  correspondent respectivement aux opérateurs  $\Sigma$ ,  $\mathcal{WS}$ ,  $\mathcal{MAX}$ . Et de plus si  $\Gamma = \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma_{K_i}(\omega) = d(\omega, K_i)$  alors  $X\mathcal{GMAX}$  correspond à l'opérateur  $\mathcal{GMAX}$ . Une autre spécification de ces opérateurs peut être trouvée dans [50, 13] où la représentation des pré-ordres se fait au moyen de possibilités. Dans notre travail, l'ensemble ordonné sur lequel nous travaillons est  $\Gamma = \mathbb{R}^+[x]$ , l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}^+$ . Une des particularités de ce choix est la possibilité de définir des opérateurs de fusion réversibles.

## 4.5 Fusion en logique possibiliste

### 4.5.1 Fusion de bases possibilistes

La fusion en logique possibiliste est un problème qui a fait l'objet nombreux travaux, et notamment [75] et [15]. Soit  $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$  un ensemble de  $n$  bases d'informations stratifiées provenant de  $n$  experts. Les

bases sont codées en logique possibiliste donc chacune d'elles est représentée par un ensemble d'informations quantifiées par des mesures de nécessité. Les bases sont supposées de même fiabilité. Soit  $\pi_1, \dots, \pi_n$  les distributions de possibilités associées à chaque base. Le but de la fusion est de calculer une distribution de possibilité, notée  $\pi_{\oplus}$  à partir des  $n$  distributions de possibilités originales.

Un opérateur de fusion possibiliste, noté  $\oplus$ , est une fonction qui prend comme entrée un vecteur  $v = (v_1, \dots, v_n)$  de réels dans l'intervalle  $[0, 1]$  et qui rend comme résultat un réel dans l'intervalle  $[0, 1]$ . L'utilisation de l'intervalle comme échelle commune signifie que l'hypothèse de commensurabilité est appliquée et que les experts utilisent la même échelle pour exprimer la certitude ou la priorité de leurs informations.

L'opérateur de fusion peut être défini au niveau sémantique ou au niveau syntaxique. Au niveau syntaxique, l'opérateur génère à partir d'un ensemble de bases possibilistes une nouvelle base possibiliste représentant le résultat de la fusion. Au niveau sémantique, l'opérateur est appliqué à un ensemble de distributions de possibilités et génère une nouvelle distribution de possibilités représentant le résultat de la fusion. L'équivalence entre le niveau syntaxique et le niveau sémantique de la fusion en logique possibiliste est garanti [15]. Si  $\pi_{\oplus}$  est le résultat de la fusion d'une distribution de possibilités  $\pi_1, \dots, \pi_n$  avec  $\oplus$  et si  $\mathcal{B}_{\oplus}$  est le résultat de la fusion des bases  $B_1, \dots, B_n$  avec  $\oplus$  alors  $\pi_{\oplus} = \pi_{\mathcal{B}_{\oplus}}$ , ou  $\pi_{\mathcal{B}_{\oplus}}$  est la distribution de possibilité associée à  $\mathcal{B}_{\oplus}$ .

Quand l'opérateur de fusion est appliqué sur les distributions de possibilités  $\pi_1, \dots, \pi_n$ , pour chaque interprétation  $\omega \in \mathcal{W}$  il prend comme entrée le vecteur

$$(\pi_1(\omega), \dots, \pi_n(\omega))$$

de réels dans l'intervalle  $[0, 1]$  et retourne un réel dans ce même intervalle qui représente le degré de possibilité  $\pi_{\oplus}(\omega)$ . Formellement cela s'écrit :

$$\pi_{\oplus}(\omega) = \oplus(\pi_1(\omega), \dots, \pi_n(\omega))$$

L'opérateur de fusion doit respecter :

**La règle de cohérence**  $\oplus(1, \dots, 1) = 1$

**La règle de monotonie** si  $\forall i, 1 \leq i \leq n, \pi_i(\omega') \leq \pi_i(\omega)$  alors  $\oplus(\pi_1(\omega'), \dots, \pi_n(\omega')) \leq \oplus(\pi_1(\omega), \dots, \pi_n(\omega))$

La propriété de cohérence affirme que si toutes les sources conviennent que  $\omega$  est entièrement possible alors le résultat de la fusion doit aussi le confirmer. Cette propriété garantit que si les bases ne sont pas conflictuelles alors le résultat de la fusion doit être cohérent. La propriété de monotonie indique que si toutes les sources considèrent que  $\omega$  est préférée à  $\omega'$ , alors le résultat de la fusion doit conserver cette préférence.

Dans [75], les auteurs ont montré que la contrepartie syntaxique de la fusion de  $\pi_1$  et  $\pi_2$  est la base de croyances possibiliste  $\mathcal{B}_{\oplus}$  composée de l'union :

- des bases initiales attachées à un nouveau degré de nécessité défini par :

$$\begin{aligned} & \{(\phi_i, 1 - (1 - \alpha_i) \oplus 1) \mid (\phi_i, \alpha_i) \in B_1\} \\ \cup & \{(\psi_j, 1 - 1 \oplus (1 - \beta_j)) \mid (\psi_j, \beta_j) \in B_2\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

- des croyances communes à  $B_1$  et  $B_2$  définies par :

$$\{(\phi_i \vee \psi_j, 1 - (1 - \alpha_i) \oplus (1 - \beta_j)) \mid (\phi_i, \alpha_i) \in B_1 \text{ and } (\psi_j, \beta_j) \in B_2\}.$$

Dans le cas de  $n$  sources, le calcul syntaxique peut être fait simplement si l'opérateur  $\oplus$  est associatif. Une généralisation syntaxique est aussi possible si  $\oplus$  n'est pas commutatif. Dans ce cas,  $\oplus$  est un opérateur unaire défini sur un vecteur  $v = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  de distributions de possibilités tel que :

- $\oplus(1, \dots, 1) = 1$ .
- si  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \pi_i(\omega) \geq \pi_i(\omega')$  alors

$$\oplus(\pi_1(\omega), \dots, \pi_n(\omega)) \geq \oplus(\pi_1(\omega'), \dots, \pi_n(\omega')).$$

La généralisation su résultat précédent est obtenue par la proposition suivante :

**Proposition 14** Soit  $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_n)$  un vecteur de bases de croyances possibilistes et soit  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$  les distributions de possibilités qui leurs sont associées. Soit  $\pi_{\mathcal{B}_{\oplus}}$  le résultat de la combinaison de  $(\pi_1, \dots, \pi_n)$  avec  $\oplus$ . La base associée à  $\pi_{\mathcal{B}_{\oplus}}$  est :

$$\mathcal{B}_{\oplus} = \{(D_j, 1 - \oplus(x_1, \dots, x_n)) \mid j = 1, \dots, n\},$$

où  $D_j$  sont des disjonctions de taille  $j$  entre des formules  $\phi_i$  issues de différentes bases  $B_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), et  $x_i$  est soit égal  $1 - \alpha_i$  ou  $1$ , selon que  $\phi_i$  soit dans  $D_j$  ou non.

Il est à noter qu'il n'est pas nécessaire que l'opérateur  $\oplus$  soit commutatif. Par exemple, l'opérateur « dictateur » issu de la théorie du choix social est représenté à partir de deux distributions de possibilités  $\pi_1$  et  $\pi_2$  entre lesquelles une priorité est définie. Dans ce contexte, si  $\pi_1$  est prioritaire par rapport à  $\pi_2$ , alors si pour deux interprétations  $\omega$  et  $\omega'$  nous avons  $\pi_1(\omega) > \pi_1(\omega')$ , l'interprétation  $\omega$  est considérée plus plausible que l'interprétation  $\omega'$  dans  $\pi_1 \oplus \pi_2$ , quelque-soit la priorité induite par  $\pi_2$  [75].

### Classes d'opérateurs de fusion possibiliste

Les opérateurs de fusion de bases possibilistes peuvent être groupés en classes selon certaines propriétés [12].

**(conjonction)**  $\forall a \in [0, 1], a \oplus 1 = 1 \oplus a = a$ .

**(disjonction)**  $\forall a \in [0, 1], a \oplus 1 = 1 \oplus a = 1$ .

**(disjonction régulière)**

- $\forall a \in [0, 1], a \oplus 1 = 1 \oplus a = 1$ .
- $\forall a \neq 1, \forall b \neq 1, a \oplus b \neq 1$ .

**(idempotence)**  $\forall a \in [0, 1], a \oplus a = a$ .

**(renforcement)**  $\forall a, b \neq 1$  et  $a, b \neq 0, a \oplus b < \min(a, b)$

**(renforcement progressif)** **(renforcement)** et  $\forall a, b \neq 0, a \oplus b \neq 0$ .

**(moyenne)**  $\max(a, b) \geq a \oplus b \geq \min(a, b)$

La propriété de conjonction stipule qu'un opérateur de fusion exploite les complémentarités symboliques entre les sources. En cas de cohérence de l'ensemble des sources, l'opérateur conserve toutes les informations symboliques. Si  $B_1$  et  $B_2$  sont deux bases possibilistes telles que  $B_1^* \cup B_2^*$  est cohérente, alors  $\mathcal{B}_{\oplus}^* = B_1^* \cup B_2^*$ . Les opérateurs validant la propriété de conjonction donne de la priorité aux informations spécifiques. Par exemple, si une source  $S_1$  contient toutes les informations fournies par une autre source  $S_2$ , la fusion des sources a pour résultat  $S_1$ .

La propriété de disjonction spécifie que les opérateurs peuvent traiter des bases possibilistes incohérentes. Quand un ensemble de bases possibilistes d'une confiance équivalente sont incohérentes, aucune préférence n'est utilisée entre celles-ci et  $\mathcal{B}_{\oplus}$  n'ignore aucune information de  $B_1$  ni de  $B_2$ .

La disjonction régulière permet aux opérateurs de fusion de prendre comme résultat la disjonction de toutes les informations symboliques fournies par les sources, si celles-ci sont incohérentes. Nous avons alors  $\mathcal{B}_{\oplus}^* \equiv B_1^* \vee B_2^*$ , où  $B_1^* \vee B_2^*$  est l'ensemble de toutes les disjonctions construites à partir des formules de  $B_1^*$  et  $B_2^*$ .

La propriété d'idempotence stipule la non prise en compte de la redondance d'information. Comme nous l'avons vu, nous pouvons ignorer la redondance de l'information dans les bases à fusionner ou bien nous pouvons interpréter cette redondance comme une confirmation de cette information. Les opérateurs idempotents ignorent les redondances directes d'information. Si deux bases contiennent la même formule  $\phi$  avec un degré  $\alpha$ , la base fusionnée ne doit pas contenir la formule  $\phi$  avec un degré supérieur à  $\alpha$ . Il faut cependant prendre en compte le fait que la formule  $\phi$  peut être obtenue en combinant des formules provenant de plusieurs bases (disjonctions).

Le renforcement, contrairement à l'idempotence, spécifie la prise en compte de la redondance d'une information comme une confirmation de celle-ci. Si la même information est présente dans plusieurs sources, la priorité attachée à cette information doit être strictement plus grande que la priorité de cette information dans chacune des sources où elle apparaît. La propriété de renforcement progressif est un raffinement de la propriété de renforcement. Elle garantit que si une formule  $(\phi, \alpha)$ , avec  $\alpha > 0$  est inférée par les sources, alors cette formule doit apparaître dans  $\mathcal{B}_{\oplus}$  avec un degré  $\beta$  tel que  $\alpha < \beta < 1$ .

Les opérateurs suivant la propriété de moyenne agrègent les priorités. Dans ce cas, les formules possibilistes représentent des buts à atteindre avec différents niveaux de priorité et non des croyances plus ou moins incertaines.

La combinaison d'un opérateur de disjonction régulière  $\oplus_d$  et d'un opérateur de renforcement  $\oplus_r$  permet de définir une opération adaptative  $\oplus_h$  telle que :

$$a \oplus_h b = \max (\min (h, (a \oplus_d b)), \min (1 - h, (a \oplus_r b))) .$$

Si  $h = 1$ , nous avons  $a \oplus_h b = a \oplus_d b$ , et si  $h = 0$  nous avons  $a \oplus_h b = a \oplus_r b$ . Ces opérateurs permettent de retrouver les croyances communes à toutes les bases.



## Chapitre 5

# Représentation de pré-ordres par des polynômes

### Contents

---

<b>5.1</b>	<b>Rappels et notations . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>5.2</b>	<b>Pré-ordres sur les polynômes . . . . .</b>	<b>52</b>
<b>5.3</b>	<b>Représentation de pré-ordres par des polynômes à coefficients dans <math>\mathbb{F}_2</math> . . . . .</b>	<b>53</b>
5.3.1	Représentation d'un pré-ordre . . . . .	53
5.3.2	Combinaison de pré-ordres . . . . .	55
<b>5.4</b>	<b>Représentation de pré-ordres par des polynômes à coefficients dans <math>\mathbb{V}</math> . . . . .</b>	<b>57</b>
5.4.1	Représentation d'un pré-ordre . . . . .	58
5.4.2	Combinaison de pré-ordres . . . . .	58

---

## Introduction

Les polynômes sont adaptées à la représentation de pré-ordres totaux et à leur combinaison. Ils permettent également de représenter les changements de pré-ordres comme nous le montre des travaux tels que [67] et [14].

Dans ce travail nous utilisons des pré-ordres afin de représenter des priorités sur les éléments d'un ensemble. Ces priorités peuvent être exprimées qualitativement ou quantitativement. Soit un ensemble  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ , des priorités qualitatives entre les éléments de  $A$  s'expriment par une relation telle que  $a_i$  est prioritaire par rapport à  $a_j$  ou inversement. Si  $a_i$  et  $a_j$  sont deux éléments de  $A$ , un pré-ordre total, noté  $\leq_A$ , peut être exprimé sur l'ensemble  $A$  par  $a_i <_A a_j$  si et seulement si  $a_i$  est prioritaire par rapport à  $a_j$ . De plus,  $a_i =_A a_j$  si et seulement si  $a_i$  est de même priorité que  $a_j$ .

Des priorités exprimées qualitativement sont dans beaucoup de cas suffisantes. Cependant, il est impossible de représenter des degrés de priorités. Exprimer qu'un élément  $a_i$  est  $n$  fois prioritaire par rapport à un élément  $a_j$  nécessite d'exprimer quantitativement les priorités. Cette expression repose sur une distribution de poids pour les éléments de  $A$ . Une fonction de pondération  $w$  associe à chaque élément de  $A$  un poids issu d'un ensemble  $\mathbb{V}$  totalement ordonné par la relation  $\leq_{\mathbb{V}}$ . Un élément  $a_i$  est prioritaire par rapport à un élément  $a_j$  si et seulement si  $w(a_i) <_{\mathbb{V}} w(a_j)$ . Les éléments  $a_i$  et  $a_j$  sont de même priorité si et seulement si  $w(a_i) =_{\mathbb{V}} w(a_j)$ . Les valeurs  $w(a_i)$  et  $w(a_j)$  sont respectivement les degrés de priorité de  $a_i$  et  $a_j$ .

Nous proposons dans ce chapitre une représentation de priorités exprimées qualitativement et quantitativement par des pré-ordres sur les polynômes. Dans une première section, nous rappelons quelques notions sur les polynômes. Nous étudions ensuite la représentation de priorités exprimées qualitativement par des polynômes à coefficients dans le corps  $\mathbb{F}_2$  puis la représentation par des polynômes à coefficients dans un ensemble totalement pré-ordonné quelconque de priorités exprimées quantitativement. Dans les deux cas, la combinaison de plusieurs pré-ordres sur un même ensemble est décrite.

## 5.1 Rappels et notations

Dans ce travail, nous utilisons des polynômes à coefficients dans un ensemble  $\mathbb{V}$  totalement pré-ordonné par la relation  $\leq_{\mathbb{V}}$ . On note  $\mathbb{V}[x]$  l'ensemble des polynômes définis tels que  $p = \sum_{i=0}^n p_i x^i$ ,  $p_i \in \mathbb{V}$ . Le degré d'un polynôme  $p$  est noté  $\deg(p) = n$  est défini tel que pour tout  $i$ ,  $i > n$ ,  $p_i = 0$ .

On appelle décalage vers la droite de  $k$  positions de  $p$  une multiplication de  $p$  par  $x^k$ , réciproquement, on appelle décalage vers la gauche de  $k$  positions une division par  $x^k$ . En pratique, l'ensemble des valeurs de coefficients  $\mathbb{V}$  est souvent l'ensemble des réels positifs  $\mathbb{R}^+$ , des entiers naturels  $\mathbb{N}$  ou encore les éléments du corps des entiers  $\mathbb{F}_2$  muni de la loi de multiplication et de la loi d'addition modulo 2.

## 5.2 Pré-ordres sur les polynômes

Soit  $p$  et  $q$  deux polynômes à coefficients dans un ensemble  $\mathbb{V}$  totalement pré-ordonné par la relation  $\leq_{\mathbb{V}}$  tels que  $p = \sum_{i=0}^k p_i x^i$ ,  $p_i \in \mathbb{V}$  et  $q = \sum_{j=0}^l q_j x^j$ ,  $q_j \in \mathbb{V}$ . Afin de comparer les polynômes nous définissons les pré-ordres suivants :

**Maximum** Le pré-ordre suivant le maximum, noté  $\leq_{MAX}$ , est défini par :

$$p \leq_{MAX} q \text{ ssi } \max_{i=0}^k (p_i) \leq_{\mathbb{V}} \max_{j=0}^l (q_j)$$

Le pré-ordre suivant le maximum donne plus d'importance au coefficient du polynôme ayant la plus grande valeur. Un polynôme avec un coefficient ayant une valeur élevée a un rang élevé dans le pré-ordre. Afin de quantifier le rang d'un polynôme dans le pré-ordre  $\leq_{MAX}$ , nous définissons la fonction de poids  $w_{MAX}$  telle que :

$$w_{MAX}(p) = \max_{i=0}^k (p_i)$$

**Somme** Le pré-ordre suivant la somme, noté  $\leq_{SUM}$ , est défini par :

$$p \leq_{SUM} q \text{ ssi } \sum_{i=0}^k p_i \leq_{\mathbb{V}} \sum_{j=0}^l q_j$$

Le pré-ordre suivant la somme donne plus d'importance aux polynômes ayant beaucoup de grands coefficients. La quantification du rang du polynôme dans le pré-ordre  $\leq_{SUM}$  est obtenue grâce à la fonction de poids  $w_{SUM}$  définie telle que :

$$w_{SUM}(p) = \sum_{i=0}^k p_i$$

**Somme pondérée** Soit  $\{a_i, 1 \leq i \leq k\}$  et  $\{b_j, 1 \leq j \leq l\}$  deux ensembles de scalaires choisis dans  $\mathbb{V}$ . Le pré-ordre suivant la somme pondérée, noté  $\leq_{WS}$  est défini par :

$$p \leq_{WS} q \text{ ssi } \sum_{i=0}^k a_i \times p_i \leq_{\mathbb{V}} \sum_{j=0}^l b_j \times q_j$$

Le pré-ordre suivant la somme pondérée fonctionne de manière analogue à celui de somme. Cependant, la pondération permet d'exprimer une priorité sur des degrés particuliers. Afin de quantifier le rang d'un polynôme  $p$  dans le pré-ordre  $\leq_{WS}$  nous définissons la fonction de poids  $w_{WS}$  telle que :

$$w_{WS}(p) = \sum_{i=0}^k a_i \times p_i$$

**Lexicographique** Le pré-ordre suivant l'ordre lexicographique, noté  $\leq_{LEX}$  est défini par :

$$p \leq_{LEX} q \text{ ssi } \exists i \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{N}, j < i, (p_j =_{\mathbb{V}} q_j \text{ et } p_i <_{\mathbb{V}} q_i)$$

Le pré-ordre suivant l'ordre lexicographique des coefficients donne plus d'importance aux coefficients de haut degré. Plus un polynôme est de haut degré, plus il est de rang élevé.

**Maximum généralisé** Soit les vecteurs  $v$  et  $w$  formés respectivement des coefficients de  $p$  et  $q$  ordonnés suivant l'ordre croissant. Soit  $p' = \sum_{i=0}^n v_i x^i$  et  $q' = \sum_{j=0}^m w_j x^j$  deux polynômes construits respectivement à partir des composantes des vecteurs  $v$  et  $w$ . Le pré-ordre suivant le maximum généralisé, noté  $\leq_{GMAX}$  est défini par :

$$p \leq_{GMAX} q \text{ ssi } p' \leq_{LEX} q'$$

Le pré-ordre suivant le maximum généralisé donne une plus grande importance aux coefficients maximaux avec un raffinement à chaque rang de coefficient.

## 5.3 Représentation de pré-ordres par des polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}_2$

Lorsque les priorités sur un ensemble  $A$  sont exprimées qualitativement, il est possible de représenter le pré-ordre  $\leq_A$  associé par des polynômes à coefficients dans le corps, noté  $F_2$ , des entiers  $\{0, 1\}$  muni de la loi de multiplication et de la loi d'addition des entiers modulo 2. Chaque polynôme attaché à un élément  $a_i$  de  $A$  code le rang de  $a_i$  dans le pré-ordre  $\leq_A$ .

La combinaison de plusieurs pré-ordres sur l'ensemble  $A$  est exprimable en utilisant des pré-ordres sur les polynômes.

### 5.3.1 Représentation d'un pré-ordre

Soit  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  un ensemble pour lequel des priorités qualitatives sur les éléments sont exprimées. Un pré-ordre  $\leq_A$  peut être défini par :

$$\begin{aligned} &\forall a_i, a_j \in A, \\ &a_i <_A a_j \text{ si et seulement si } a_i \text{ est prioritaire par rapport à } a_j \\ &a_i =_A a_j \text{ si et seulement si } a_i \text{ a la même priorité que } a_j \end{aligned}$$



Nous ne considérons ici que les cas où le pré-ordre  $\leq_A$  est total, ce qui implique de ne considérer que les cas où les priorités exprimées permettent de construire un pré-ordre total. Soit  $rk_A$  la fonction de rang faisant correspondre à chaque élément  $a_i$  de  $A$  un entier  $rk_A(a_i) \in \mathbb{N}^*$  représentant son rang dans le pré-ordre  $\leq_A$ . A chaque élément  $a_i$  nous associons le polynôme constant  $p_A(a_i)$  représentant la décomposition en base 2 du rang de  $a_i$  moins 1. Le choix de prendre le rang moins un permet d'avoir un polynôme nul associé aux éléments minimaux de  $A$ . Nous appelons poids ce polynôme. Formellement :

**Définition 56** Soit  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  un ensemble muni d'un pré-ordre total  $\leq_A$ . Le poids  $p_A(a_i)$  représentant le rang de  $a_i$  dans le pré-ordre  $\leq_A$  est défini par :

$$\forall a_i \in A \quad p_A(a_i) = \sum_{k=0}^m v_k x^k$$

Le vecteur  $V(a_i) = (v_0, \dots, v_m)$  est la décomposition binaire de  $rk_A(a_i) - 1$  dans l'ordre décroissant suivant les puissances de 2, c'est à dire  $rk_A(a_i) - 1 = \sum_{k=0}^m v_k * 2^{m-k}$ , où  $m \in \mathbb{N}$  est tel que  $2^m < \max_{i=1}^n (rk_{\leq_A}(a_i)) \leq 2^{m+1}$ . Les coefficients du polynôme construit sont dans l'ordre inverse de leur apparition dans le vecteur  $V(a_i)$

Une propriété de la décomposition binaire des entiers naturels est l'équivalence entre le pré-ordre classique sur les entiers naturels et l'ordre lexicographique sur les vecteurs représentant la décomposition binaire de ces entiers. Formellement :

$$\forall n_i, n_j \in \mathbb{N}, n_i \leq n_j \text{ si et seulement si } V(n_i) \leq_{LEX} V(n_j)$$

Les polynômes représentant la décomposition binaire des rangs des éléments de  $A$  ont des coefficients de degré  $i$  égaux aux composantes  $v_i$  de la décomposition  $V(a_i)$  pour l'entier naturel  $rk_A(a_i) - 1$ . De plus, le pré-ordre lexicographique sur les polynômes est équivalent à l'ordre lexicographique sur les vecteurs de coefficients des polynômes. Nous pouvons donc écrire :

$$\forall a_i, a_j \in A, a_i \leq_A a_j \text{ si et seulement si } p_A(a_i) \leq_{LEX} p_A(a_j)$$

A partir d'un polynôme  $p_A(a_i)$  il est possible de retrouver le rang de  $a_i$ . Nous pouvons alors proposer une définition du rang d'un élément en fonction de son polynôme associé :

**Définition 57** Soit  $A$  un ensemble muni d'un pré-ordre  $\leq_A$  représenté par des polynômes  $p_A$ . Le rang des éléments  $a_i$  de  $A$  peut s'écrire :

$$\forall a_i \in A, rk_A(a_i) = 1 + \sum_{k=0}^{deg(p_A(a_i))} p_k * 2^{deg(p_A(a_i))-k}, \text{ avec } p_A(a_i) = \sum_{k=0}^m p_k x^k$$

L'exemple 2 montre la représentation d'un pré-ordre par des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{F}_2$ .

**Exemple 2** Nous proposons de représenter le pré-ordre utilisé dans l'exemple 5 en page 58. Soit  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  un ensemble muni d'un pré-ordre total noté  $\leq_A$  défini par :

$$a_2 <_A a_3 <_A a_1 <_A a_4$$

La fonction de rang  $rk_A$  est telle que :

$$\begin{aligned} rk_A(a_1) &= 3 \\ rk_A(a_2) &= 1 \\ rk_A(a_3) &= 2 \\ rk_A(a_4) &= 4 \end{aligned}$$

Les vecteurs représentant la décomposition en base 2 des rangs moins un dans l'ordre décroissant des puissances de 2 sont :

$$\begin{aligned} v(a_1) &= (1, 0) \\ v(a_2) &= (0, 0) \\ v(a_3) &= (0, 1) \\ v(a_4) &= (1, 1) \end{aligned}$$

A chaque élément  $a_i$  nous associons le polynôme  $p_A(a_i)$  construit à partir de  $v(a_i)$ . Formellement :

$$p_A(a_i) = \sum_{k=0}^n v_k x^k, v_k \in V(a_i)$$

La construction des polynômes pour chaque élément de  $A$  donne :

$$\begin{aligned} p_A(a_1) &= \sum_{k=0}^1 v_k x^k \\ &= 1x^0 + 0x^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_A(a_2) &= \sum_{k=0}^1 v_k x^k \\ &= 0x^0 + 0x^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_A(a_3) &= \sum_{k=0}^1 v_k x^k \\ &= 0x^0 + 1x^1 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_A(a_4) &= \sum_{k=0}^1 v_k x^k \\ &= 1x^0 + 1x^1 \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

En utilisant le pré-ordre  $\leq_{LEX}$  sur les polynômes, nous obtenons :

$$p_A(a_2) <_{LEX} p_A(a_3) <_{LEX} p_A(a_1) <_{LEX} p_A(a_4)$$

Si nous posons :  $\forall a_i, a_j \in A, a_i \leq_A a_j$  si et seulement si  $p_A(a_i) <_{LEX} p_A(a_j)$ , nous obtenons bien le pré-ordre original :

$$a_2 <_A a_3 <_A a_1 <_A a_4$$

De plus, nous pouvons retrouver le rang des éléments de  $A$  directement depuis les polynômes. En effet :

$$\begin{aligned} rk_A(a_1) &= 1 + \sum_{k=0}^{deg(p_A(a_1))} p_k * 2^{deg(p_A(a_1))-k} \\ &= 1 + (1 * 2) = 3 \\ rk_A(a_2) &= 1 + \sum_{k=0}^{deg(p_A(a_2))} p_k * 2^{deg(p_A(a_2))-k} \\ &= 1 + 0 = 1 \\ rk_A(a_3) &= 1 + \sum_{k=0}^{deg(p_A(a_3))} p_k * 2^{deg(p_A(a_3))-k} \\ &= 1 + (1 * 1) = 2 \\ rk_A(a_4) &= 1 + \sum_{k=0}^{deg(p_A(a_4))} p_k * 2^{deg(p_A(a_4))-k} \\ &= 1 + (1 * 1 + 2 * 2) = 4 \end{aligned}$$

A partir de la représentation d'un pré-ordre par des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{F}_2$  nous proposons une méthode permettant de construire des polynômes représentant la combinaison de plusieurs pré-ordres.

### 5.3.2 Combinaison de pré-ordres

Soit  $A$  un ensemble et soit  $\leq_{A_1}, \leq_{A_2}$  et  $\leq_{A_3}$  trois pré-ordres totaux différents sur  $A$ . Chacun des trois pré-ordres représente des propriétés exprimées qualitativement. La représentation de ces pré-ordres par des polynômes à coefficient dans  $\mathbb{F}_2$  permet de construire un nouveau pré-ordre exprimant des priorités issues de la prise en compte des trois ensembles de priorités différentes. Cette construction repose sur un polynôme global attaché à chaque élément  $a_i$  de  $A$  et permettant de déterminer son rang dans le pré-ordre combiné. Les polynômes globaux sont alors munis d'un pré-ordre spécifique afin de représenter la combinaison voulue.

### Construction d'un polynôme global

La première étape dans la combinaison des pré-ordres est de construire un polynôme global permettant d'attacher à chaque élément de  $A$  un polynôme composé des polynômes représentant le rang de  $a_i$  dans les pré-ordres initiaux. Formellement :

**Définition 58** Soit  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  un ensemble muni de  $t$  pré-ordres  $\leq_{A_1}, \dots, \leq_{A_t}$ . Soit  $P_1, \dots, P_t$  les ensembles de polynômes représentant respectivement les pré-ordres  $\leq_{A_1}, \dots, \leq_{A_t}$ . Pour chaque élément  $a_i$  de  $A$  nous définissons le polynôme global attaché à  $a_i$  par :

$$p_g(a_i) = \sum_{j=1}^t p_{A_j}(a_i) x^{\sum_{k=1}^{j-1} MAX_{P_k}}, p_{A_j}(a_i) \in P_j$$

avec

$$MAX_{P_t} = \max_{a_i \in A} (\deg(p_{A_t}(a_i))) + 1$$

L'exemple suivant illustre la construction du polynôme global pour un ensemble donné muni de trois pré-ordres.

**Exemple 3** Soit  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  un ensemble sur lequel sont exprimés trois pré-ordres totaux notés  $\leq_{A_1}, \leq_{A_2}$  et  $\leq_{A_3}$  définis respectivement par :

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & <_{A_1} & a_2 & <_{A_1} & a_3 & <_{A_1} & a_4 \\ a_2 & =_{A_2} & a_3 & <_{A_2} & a_1 & =_{A_2} & a_4 \\ a_1 & <_{A_3} & a_4 & <_{A_3} & a_2 & <_{A_3} & a_3 \end{array}$$

Les rangs moins 1 des éléments pour les pré-ordres sont les suivants :

$rk$	$rk_{A_1}$	$rk_{A_2}$	$rk_{A_3}$
$a_1$	0	1	0
$a_2$	1	0	2
$a_3$	2	0	3
$a_4$	3	1	1

La représentation des pré-ordres par des polynômes donne les ensembles de polynômes exprimés dans le tableau suivant. Pour des détails sur la construction des polynômes, voir l'exemple 2, page 54.

$P$	$p_{A_1}$	$p_{A_2}$	$p_{A_3}$
$a_1$	0	1	0
$a_2$	$x$	0	1
$a_3$	1	0	$1+x$
$a_4$	$1+x$	1	$x$

Posons :

$$\begin{aligned} P_1 &= \{p_{A_1}(a_1), p_{A_1}(a_2), p_{A_1}(a_3), p_{A_1}(a_4)\} \\ P_2 &= \{p_{A_2}(a_1), p_{A_2}(a_2), p_{A_2}(a_3), p_{A_2}(a_4)\} \\ P_3 &= \{p_{A_3}(a_1), p_{A_3}(a_2), p_{A_3}(a_3), p_{A_3}(a_4)\} \end{aligned}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} MAX_{P_1} &= \max_{a_i \in A} (\deg(p_{A_1}(a_i))) + 1 = 2 \\ MAX_{P_2} &= \max_{a_i \in A} (\deg(p_{A_2}(a_i))) + 1 = 1 \\ MAX_{P_3} &= \max_{a_i \in A} (\deg(p_{A_3}(a_i))) + 1 = 2 \end{aligned}$$

D'après la définition 58, le polynôme global attaché à chaque élément  $a_i$  est tel que :

$$\begin{aligned}
 p_g(a_1) &= \sum_{j=1}^3 p_{A_j}(a_1) x^{\sum_{k=1}^{j-1} MAX_{P_k}} \\
 &= p_{A_1}(a_1) x^0 + p_{A_2}(a_1) x^{MAX_{P_1}} + p_{A_3}(a_1) x^{MAX_{P_1} + MAX_{P_2}} \\
 &= 0 * x^0 + 1 * x^2 + 0 * x^3 \\
 &= x^2 \\
 p_g(a_2) &= \sum_{j=1}^3 p_{A_j}(a_2) x^{\sum_{k=1}^{j-1} MAX_{P_k}} \\
 &= p_{A_1}(a_2) x^0 + p_{A_2}(a_2) x^{MAX_{P_1}} + p_{A_3}(a_2) x^{MAX_{P_1} + MAX_{P_2}} \\
 &= x * x^0 + 0 * x^2 + 1 * x^4 \\
 &= x + x^4 \\
 p_g(a_3) &= \sum_{j=1}^3 p_{A_j}(a_3) x^{\sum_{k=1}^{j-1} MAX_{P_k}} \\
 &= p_{A_1}(a_3) x^0 + p_{A_2}(a_3) x^{MAX_{P_1}} + p_{A_3}(a_3) x^{MAX_{P_1} + MAX_{P_2}} \\
 &= 1 * x^0 + 0 * x^2 + (1 + x) * x^3 \\
 &= 1 + x^3 + x^4 \\
 p_g(a_4) &= \sum_{j=1}^3 p_{A_j}(a_4) x^{\sum_{k=1}^{j-1} MAX_{P_k}} \\
 &= p_{A_1}(a_4) x^0 + p_{A_2}(a_4) x^2 + p_{A_3}(a_4) x^{2+1} \\
 &= (1 + x) * x^0 + 1 * x^2 + x * x^3 \\
 &= 1 + x + x^2 + x^4
 \end{aligned}$$

Le tableau suivant résume la construction des polynômes globaux à partir des polynômes initiaux.

$P$	$p_{A_1}$	$p_{A_2}$	$p_{A_3}$	$p_g$
$a_1$	0	1	0	$x^2$
$a_2$	$x$	0	1	$x + x^4$
$a_3$	1	0	$1 + x$	$1 + x^3 + x^4$
$a_4$	$1 + x$	1	$x$	$1 + x + x^2 + x^4$

### Comparaison des polynômes globaux

Afin d'obtenir un pré-ordre combiné nous utilisons les pré-ordres sur les polynômes définis en 5.2, page 52. Chaque pré-ordre utilisé produit un pré-ordre combiné selon des critères particuliers. L'exemple suivant illustre l'utilisation des pré-ordres sur les polynômes globaux :

**Exemple 4** Reprenons l'exemple 3. Si nous utilisons les pré-ordres sur les polynômes pour comparer les polynômes globaux, nous obtenons :

$A$	$p_g$	$w_{MAX}$	$w_{SUM}$	$w_{WS}$	$w_{LEX}$	$w_{\mathcal{GMAA}}$
$a_1$	$x^2$	1	1	1	1	1
$a_2$	$x + x^3$	1	1	1	2	2
$a_3$	$1 + x^3 + x^4$	1	3	3	3	3
$a_4$	$1 + x + x^2 + x^4$	1	4	4	4	4

Pour le pré-ordre somme pondérée  $WS$  nous utilisons arbitrairement les scalaires  $k_i = 1$  afin de reproduire le comportement du pré-ordre  $SUM$ .

## 5.4 Représentation de pré-ordres par des polynômes à coefficients dans $\mathbb{V}$

Lorsque les priorités sur un ensemble  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  sont exprimées quantitativement, il est possible de représenter le pré-ordre  $\leq_A$  associé par des polynômes à coefficients dans un ensemble  $\mathbb{V}$  exprimant les degrés de priorité. Chaque polynôme attaché à un élément  $a_i$  de  $A$  code le degré de priorité de  $a_i$  (ou poids) permettant d'exprimer le pré-ordre  $\leq_A$ . La combinaison de plusieurs pré-ordres sur l'ensemble  $A$  est exprimable en utilisant des pré-ordres sur les polynômes.

### 5.4.1 Représentation d'un pré-ordre

Nous proposons de représenter un pré-ordre sur un ensemble  $A$  par un ensemble de polynômes à coefficients dans un ensemble  $\mathbb{W}$  totalement pré-ordonné par la relation  $\leq_{\mathbb{W}}$ . Pour cela, nous associons à chaque élément de l'ensemble un polynôme constant représentant le degré de priorité des éléments de  $A$ .

Soit  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  un ensemble pour lequel une distribution de degrés de priorité est fournie. A chaque élément  $a_i$  de  $A$  est associé un poids  $w_A(a_i) \in \mathbb{W}$  représentant le degré de priorité de  $a_i$ . Le pré-ordre total  $\leq_A$  est défini par :

$$\forall a_i, a_j \in A, a_i \leq_A a_j \text{ si et seulement si } w_A(a_i) \leq_{\mathbb{W}} w_A(a_j)$$

Les ensembles de poids les plus courant sont l'ensemble des réels positifs notés  $\mathbb{R}^+$  et l'ensemble des entiers naturels noté  $\mathbb{N}$ .

Afin de représenter le pré-ordre  $A$  sans perdre les informations quantitatives apportés par les degrés de priorité, nous utilisons des polynômes à coefficient dans  $\mathbb{W}$ . A chaque élément  $a_i$  nous associons le polynôme constant  $p_A(a_i)$  représentant le degré de priorité  $w_A(a_i)$  de  $a_i$ . Formellement :

$$\forall a_i \in A, p_A(a_i) = w_A(a_i)x^0$$

L'exemple suivant illustre la construction de polynômes constants représentant un pré-ordre exprimé quantitativement.

**Exemple 5** Soit  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  un ensemble pour lequel les éléments possèdent les degrés de priorité suivants, exprimés dans l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} w_A(a_1) &= 0 \\ w_A(a_2) &= 0 \\ w_A(a_3) &= 5 \\ w_A(a_4) &= 8 \end{aligned}$$

Le pré-ordre  $\leq_A$  est défini par :

$$\forall a_i, a_j \in A, a_i \leq_A a_j \text{ si et seulement si } w_A(a_i) \leq w_A(a_j)$$

Ce qui donne :

$$a_1 =_A a_2 <_A a_3 <_A a_4$$

Les polynômes constants représentant les rangs des éléments de  $A$  sont :

$$\begin{aligned} p_A(a_1) &= w_A(a_1) = 0 \\ p_A(a_2) &= w_A(a_2) = 0 \\ p_A(a_3) &= w_A(a_3) = 5 \\ p_A(a_4) &= w_A(a_4) = 8 \end{aligned}$$

Cette représentation permet de combiner des pré-ordres en transformant des ensembles de polynômes constants en un seul ensemble de polynômes non constants servant de base à la représentation de la combinaison de plusieurs pré-ordres sur un même ensemble.

### 5.4.2 Combinaison de pré-ordres

Soit  $A$  un ensemble et soit  $\leq_{A_1}, \dots, \leq_{A_t}$  des pré-ordres totaux différents sur  $A$ . La combinaison des  $t$  pré-ordres est un nouveau pré-ordre total sur les éléments de  $A$  construit selon des critères spécifiques. Nous proposons d'exprimer la combinaison de plusieurs pré-ordres grâce à un ensemble de polynômes globaux attachés aux éléments de  $A$  sur lequel le nouveau pré-ordre est exprimé.

### Construction d'un polynôme global

A chaque pré-ordre sur  $A$  correspond une distribution de polynômes constants. L'expression de la combinaison des pré-ordres repose tout d'abord sur la construction d'un polynôme non constant représentant les rangs d'un élément  $a_i$  de  $A$  dans tous les pré-ordres. Ce polynôme est tel que chacun de ses coefficients correspond à un coefficient du polynôme constant représentant le rang de  $a_i$  dans un des pré-ordres initiaux. Plus formellement :

**Définition 59** Soit  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  un ensemble de  $n$  éléments et soit  $\mathcal{P} = \{\leq_{A_1}, \dots, \leq_{A_m}\}$  un ensemble de  $m$  pré-ordres totaux sur  $A$ . A chaque pré-ordre  $\leq_{A_j} \in \mathcal{P}$  correspond un ensemble de  $n$  polynômes constants  $P_{A_j} = \{p_{A_j}(a_1), \dots, p_{A_j}(a_n)\}$ . Le polynôme combinaison des pré-ordres de  $\mathcal{P}$  pour un élément  $a_i$ , noté  $p_g(a_i)$  est défini par :

$$\forall a_i \in A, p_g(a_i) = \sum_{j=1}^m p_{A_j}(a_i) x^{j-1}$$

L'exemple suivant montre la construction de polynômes combinaisons :

**Exemple 6** Soit  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  et soit  $\mathcal{P} = \{\leq_{A_1}, \leq_{A_2}, \leq_{A_3}\}$  trois pré-ordres définis à partir des distribution de poids suivantes :

	$w_{A_1}(a_i)$	$w_{A_2}(a_i)$	$w_{A_3}(a_i)$
$a_1$	0	0	4
$a_2$	0	3	0
$a_3$	5	2	1
$a_4$	5	0	8

L'ensemble des degrés de priorité est ici l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  muni. Les pré-ordres basés sur ces poids sont donc :

$$\begin{array}{llll} a_1 =_{A_1} a_2 <_{A_1} a_3 =_{A_1} a_4 \\ a_4 =_{A_2} a_1 <_{A_2} a_3 <_{A_2} a_2 \\ a_2 <_{A_3} a_3 <_{A_3} a_1 <_{A_3} a_4 \end{array}$$

Les polynômes constants représentant les trois pré-ordres sont donnés dans le tableau suivant. L'ensemble des coefficients est  $V = \mathbb{N}$ .

$A$	$p_{A_1}$	$p_{A_2}$	$p_{A_3}$
$a_1$	0	0	4
$a_2$	0	3	0
$a_3$	5	2	1
$a_4$	5	0	8

La construction d'un polynôme combinaison pour l'élément  $a_1$  est la suivante :

$$\begin{aligned} p_g(a_1) &= \sum_{j=1}^3 p_{A_j}(a_1) x^{j-1} \\ &= p_{A_1}(a_1) x^0 + p_{A_2}(a_1) x^1 + p_{A_3}(a_1) x^2 \\ &= 4x^2 \end{aligned}$$

En utilisant la même méthode pour  $a_2, a_3$  et  $a_4$ , nous construisons leurs polynômes combinaisons. Le tableau suivant récapitule les polynômes constants et les polynômes combinaisons :

$A$	$p_{A_1}$	$p_{A_2}$	$p_{A_3}$	$p_g$
$a_1$	0	0	4	$4x^2$
$a_2$	0	3	0	$3x$
$a_3$	5	2	1	$5 + 2x + x^2$
$a_4$	5	0	8	$5 + 8x^2$

Les polynômes combinaisons construits ne permettent pas d'établir un pré-ordre combiné directement. Pour cela, une stratégie de combinaison, notée  $q$ , doit être choisie. Cette stratégie est représentée par un pré-ordre total sur les polynômes combinaisons.

### Pré-ordres sur les polynômes combinaisons

Le choix de l'ensemble des valeurs de coefficient  $\mathbb{W}$  doit être fait de façon à être la plus adaptée au pré-ordre à représenter. Dans la plupart des cas, les ensembles usuels  $\mathbb{R}^+$ ,  $\mathbb{N}$  (ou des sous ensembles de ceux-ci) sont utilisés. Cependant, des ensembles spécifiques peuvent être choisis à condition de posséder en plus d'une relation d'ordre total les opérations algébriques nécessaires (multiplication pour  $\mathcal{WS}$ , addition pour  $\mathcal{WS}$  et  $\mathcal{SUM}$ ). Pour chaque stratégie  $q$ , un pré-ordre total  $\leq_q$  est défini. Nous utilisons ici les pré-ordres  $\leq_{MAX}$ ,  $\leq_{SUM}$ ,  $\leq_{WS}$ ,  $\leq_{LEX}$ ,  $\leq_{GMAX}$  qui correspondent à des stratégies connues en particulier dans le domaine de la fusion de connaissances [13, 53].

L'exemple suivant illustre l'application d'une stratégie pour exprimer un pré-ordre combinaison de plusieurs pré-ordres sur un même ensemble.

**Exemple 7** Reprenons l'exemple 6 de la page 59. Le tableau suivant récapitule les polynômes associés à chaque élément  $a_i$  de  $A$ . Les poids dans les pré-ordres combinés  $\leq_{MAX}$ ,  $\leq_{SUM}$ ,  $\leq_{WS}$ ,  $\leq_{LEX}$  et  $\leq_{GMAX}$  sont représentés respectivement par  $w_{MAX}$ ,  $w_{SUM}$ ,  $w_{WS}$ ,  $w_{LEX}$  et  $w_{GMAX}$ . Pour le pré-ordre de somme pondérée, nous définissons arbitrairement 3 scalaires  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 2$  et  $s_3 = 1$  associés respectivement à  $\leq_{A_1}$ ,  $\leq_{A_2}$  et  $\leq_{A_3}$ .

$A$	$p_{A_1}$	$p_{A_2}$	$p_{A_3}$	$p_g$	$w_{MAX}$	$w_{SUM}$	$w_{WS}$	$w_{LEX}$	$w_{GMAX}$
$a_1$	0	0	4	$4x^2$	4	4	8	1	2
$a_2$	0	3	0	$3x$	3	3	6	2	1
$a_3$	5	2	1	$5 + 2x + x^2$	5	8	10	4	3
$a_4$	5	0	8	$5 + 8x^2$	8	13	13	3	4

A partir des stratégies représentées par les pré-ordres sur les polynômes, nous obtenons différents pré ordres combinés :

$$\begin{array}{llll}
 a_2 <_{MAX} a_1 & a_3 <_{MAX} a_4 \\
 a_2 <_{SUM} a_1 & a_3 <_{SUM} a_4 \\
 a_2 <_{WS} a_1 & a_3 <_{WS} a_4 \\
 a_1 <_{LEX} a_2 & a_4 <_{LEX} a_3 \\
 a_2 <_{GMAX} a_1 & a_3 <_{GMAX} a_4
 \end{array}$$

Selon la stratégie choisie, le pré-ordre combiné est différent. Cependant, les polynômes globaux attachés aux éléments  $a_i$  de  $A$  sont indépendants de la stratégie choisie. Cette indépendance permet de changer de stratégie sans avoir à recalculer les polynômes globaux.

Nous remarquons également que certaines stratégies différentes induisent le même pré-ordre combiné. Cependant, les poids globaux sont différents et cette information quantitative n'est pas perdue. En effet, à partir des polynômes globaux il est possible de retrouver les poids initiaux grâce à ses coefficients.

## Chapitre 6

# Représentation d'états épistémiques

### Contents

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>6.2</b>	<b>Représentation d'ensembles d'états épistémiques . . . . .</b>	<b>63</b>
<b>6.3</b>	<b>Représentation sémantique . . . . .</b>	<b>64</b>
6.3.1	Ensemble de pré-ordres sur les interprétations . . . . .	65
6.3.2	Pré-ordre interne . . . . .	65
6.3.3	Pré-ordre externe . . . . .	69
<b>6.4</b>	<b>Représentation syntaxique . . . . .</b>	<b>70</b>
6.4.1	Ensemble de base de croyances stratifiées . . . . .	70
6.4.2	Pré-ordre interne . . . . .	71
6.4.3	Pré-ordre externe . . . . .	72
<b>6.5</b>	<b>Équivalence entre représentations sémantique et syntaxique. . . . .</b>	<b>72</b>
6.5.1	De la représentation syntaxique à la représentation sémantique . . . . .	73
6.5.2	De la représentation sémantique à la représentation syntaxique . . . . .	76
6.5.3	Construction d'une base de croyances stratifiée . . . . .	76

---



## 6.1 Introduction

La logique propositionnelle est très utilisée en représentation des connaissances. De nombreuses propriétés en font un langage adapté à la formalisation de croyances et à leur traitement automatique.

Nous proposons d'utiliser la logique propositionnelle afin de représenter les croyances issues de l'information exprimée par les experts (assimilés généralement à des agents) d'un domaine. A chaque source d'information peut être associé un état épistémique représentant les croyances d'un agent. Cet état épistémique est composé :

- Des croyances de l'expert sur une source ;
- D'un moyen expression de priorités entre les croyances.

Dans le cadre de la logique propositionnelle, ces croyances sont représentées par des formules propositionnelles décrivant les sources d'informations. Les priorités entre les croyances sont quant à elles représentées par des pré-ordres sur ces formules.

Comme le montre la figure 6.1, à un ensemble  $\mathcal{I} = \{S_1, \dots, S_i, \dots, S_n\}$  de sources d'information

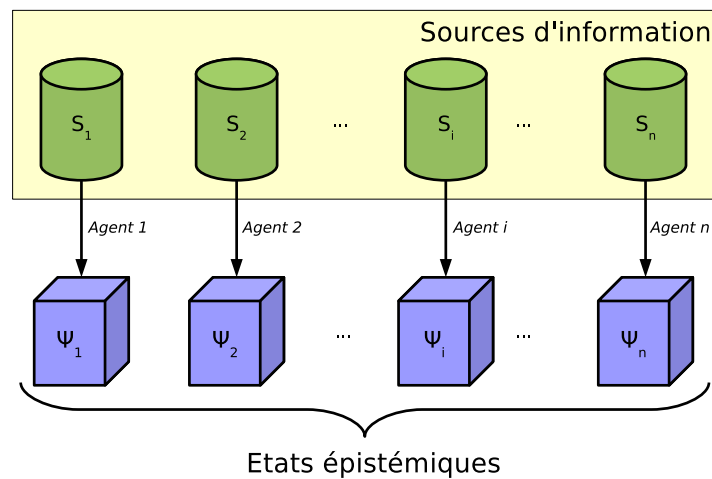


FIG. 6.1 – Représentation de croyances sur des sources d'information par des états épistémiques.

correspond un ensemble  $\Psi = \{\Psi_1, \dots, \Psi_i, \dots, \Psi_n\}$  d'états épistémiques.

Un ensemble d'états épistémiques permet de représenter deux types de priorités :

- Les priorités internes.
- Les priorités externes.

Les priorités internes s'appliquent aux croyances d'un même état épistémique. Elles représentent l'importance des croyances aux yeux de l'agent. Dans le cadre de la représentation de croyances issues d'une expertise, l'expert fournissant des informations exprime également des priorités entre celles-ci. Par exemple, dans le domaine de la mesure, certaines informations peuvent être plus importantes que d'autres. Les mesures bénéficiant de la meilleure qualité ou les plus directes sont souvent prioritaires par rapport aux mesures indirectes ou moins précises.

Les priorités internes peuvent être exprimées explicitement ou implicitement. Dans le cas explicite, chaque agent fournit un classement sur les croyances qu'il contient. Si les priorités sont implicites, chaque agent peut fournir une méthode permettant de déterminer les priorités entre les croyances. Ces méthodes peuvent être ramenées à des fonctions calculant la priorité d'une croyance en fonction de propriétés spécifiques. Il est également possible qu'aucune priorité ne soit exprimée. Ce cas est rencontré si l'agent est incapable d'exprimer des priorités lui-même ou si il considère toutes les croyances comme d'égale importance. La définition de priorités peut dans ce cas reposer sur des critères purement logiques.

Les priorités externes s'appliquent entre les états épistémiques eux mêmes. Chaque état épistémique représente les croyances d'un agent fondées sur des informations fournies par un expert. Chaque expert étant différent, il est parfois possible d'exprimer une priorité entre eux. Cette priorité représente par exemple le degré de confiance entre des experts et le responsable de l'étude.

Les priorités externes peuvent être exprimées explicitement ou implicitement. Des priorités explicites sont données arbitrairement. Pour des priorités implicites, une méthode spécifique est utilisée afin de déterminer les priorités entre les agents. Cette méthode peut être ramenée à une fonction calculant la priorité entre deux agents à partir de paramètres spécifiques. Il est également possible qu'aucune priorité entre les agents ne soit exprimée. Dans ce cas, comme pour les priorités externes, l'expression de priorités externes repose sur des méthodes qui ne sont pas liées au contexte.

Nous proposons maintenant de représenter un ensemble d'états épistémiques muni de priorités internes et de priorités externes en logique propositionnelle. Cette représentation est basée sur la notion d'ensemble d'états épistémiques. Nous décrirons la représentation sémantique d'un état épistémique puis sa représentation syntaxique. Dans les deux cas, la représentation des priorités internes et des priorités externes est également décrite. Une méthode automatique de passage d'une représentation à l'autre est présentée.

## 6.2 Représentation d'ensembles d'états épistémiques

Lors du relevé d'un site archéologique, la mesure est réalisée par plusieurs opérateurs différents lors de différentes sessions. Chaque session peut être vue comme une source d'information relative à une partie du site ou à une période donnée.

Afin d'étudier les informations fournies, il est nécessaire de les représenter dans un formalisme adapté. La logique propositionnelle est une représentation particulièrement intéressante. En effet, elle permet de représenter des croyances sur les informations mais également de faire des inférences à partir de celles-ci. Ces inférences peuvent être utilisées pour détecter des incohérences dans les résultats ou pour déduire de nouvelles croyances.

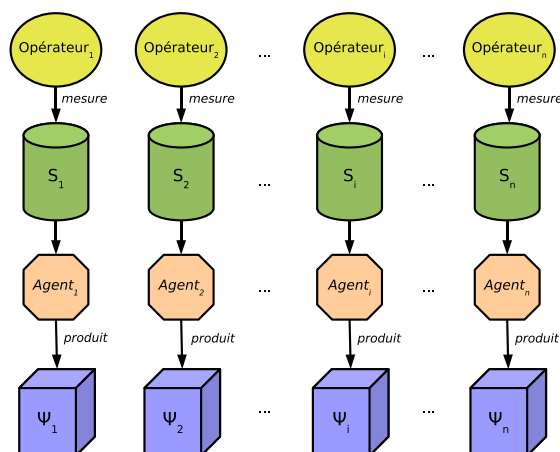


FIG. 6.2 – Représentation d'un ensemble de sources d'informations par un ensemble d'états épistémiques.

La figure 6.2 illustre la construction de la représentation d'un ensemble de sources d'information par un ensemble d'états épistémiques. Cette construction repose sur un agent qui sert d'interface entre les informations et les croyances exprimées.

Un agent est une entité capable de décrire des informations provenant d'une source dans une représentation voulue. Dans notre cas, les agents permettent de décrire des résultats de sessions d'informations en logique propositionnelle. Les agents peuvent être de deux natures différentes. Soit ils sont des programmes basés sur un algorithme spécifique de description, soit ils sont des interfaces permettant directement à un expert de décrire les informations d'une source. La traduction de la description de l'expert dans la représentation voulue est alors

fournie par un module automatique. La figure 6.3 illustre la double nature des agents. Le but de l'agent est de

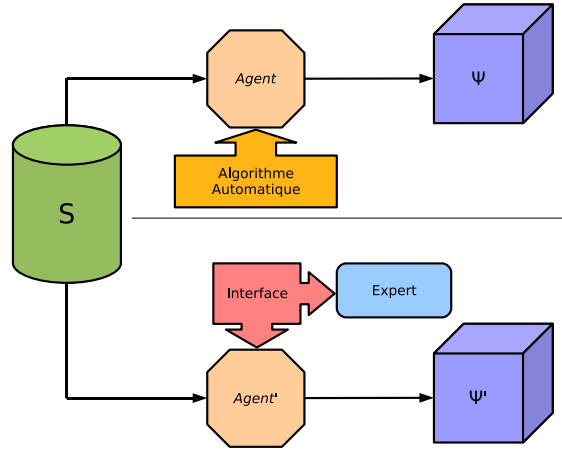


FIG. 6.3 – Les deux natures possibles pour un agent.

fournir un état épistémique représentant une source d'information. Dans le cas où des priorités entre les sources d'informations sont présentes, celles-ci sont conservées entre les états épistémiques fournis.

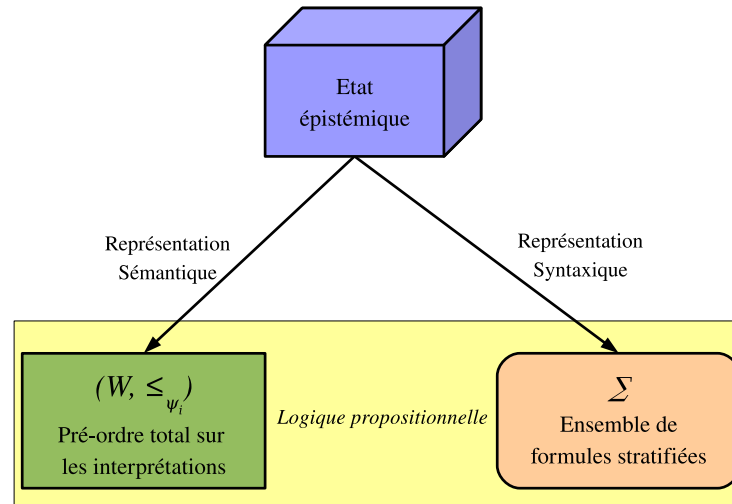


FIG. 6.4 – Représentation d'un état épistémique en logique propositionnelle.

Comme le montre la figure 6.4, un état épistémique peut être représenté en logique propositionnelle soit d'un point de vue sémantique soit d'un point de vue syntaxique. Nous décrivons maintenant ces deux approches.

### 6.3 Représentation sémantique

La représentation sémantique en logique propositionnelle est basée sur les interprétations du langage. Chaque croyance est représentée par un ensemble d'interprétations. Les priorités internes sont représentées par des pré-ordres totaux sur les interprétations et la priorité externe est représentée par un pré-ordre total sur les états épistémiques.

### 6.3.1 Ensemble de pré-ordres sur les interprétations

Un état épistémique  $\Psi_i$  est représenté par un pré-ordre total, noté  $\leq_{\Psi_i}$ , sur l'ensemble des interprétations  $\mathcal{W}$ . Plus formellement, nous pouvons écrire la définition suivante :

**Définition 60** Soit  $\mathcal{W}$  l'ensemble des interprétations du langage  $\mathcal{LP}_c$  et soit  $\leq_{\Psi_i}$  un pré-ordre total sur  $\mathcal{W}$ . Le couple  $\xi_i = (\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$  est la représentation sémantique de l'état épistémique  $\Psi_i$ .

Un état épistémique exprime une préférence sur toutes les informations disponibles. Cependant, seule une partie de ces informations est observable. Nous appelons croyances observables de l'état épistémique  $\Psi_i$  l'ensemble de formules propositionnelles  $K_i$  dont les modèles sont les interprétations minimales pour  $\leq_{\Psi_i}$  :

$$\text{Mod}(K_i) = \text{Mod}(\text{Bel}(\Psi_i)) = \min(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$$

Un ensemble  $\Psi = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}$  d'états épistémiques est représenté sémantiquement par un ensemble de pré-ordres  $\{\leq_{\Psi_1}, \dots, \leq_{\Psi_n}\}$  sur l'ensemble des interprétations  $\mathcal{W}$ . Nous notons  $\mathcal{C} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  l'ensemble représentant sémantiquement un ensemble d'états épistémiques  $\Psi = \{\Psi_1, \dots, \Psi_i, \dots, \Psi_n\}$  où chaque élément  $\xi_i$  est le couple  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$  représentant sémantiquement l'état épistémique  $\Psi_i$ .

A chaque ensemble d'états épistémiques  $\Psi = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}$  est associé un ensemble de croyances observables  $E = \{K_1, \dots, K_n\}$  ou  $\text{Mod}(K_i) = \text{Mod}(\text{Bel}(\Psi_i)) = \min(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

### 6.3.2 Pré-ordre interne

Les priorités entre les croyances d'un état épistémique sont représentées par un pré-ordre total sur les interprétations. Ce pré-ordre repose sur la définition d'une fonction de pondération des interprétations. Le pré-ordre interne est alors assimilé à un pré-ordre sur les poids associés aux interprétations. Formellement :

**Définition 61** Soit  $\Psi = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}$  un ensemble d'états épistémiques,  $\mathcal{W}$  l'ensemble des interprétations du langage et  $X$  un ensemble muni d'un pré-ordre total noté  $\leq_X$  et possédant un élément minimal pour  $\leq_X$ . Une fonction de pondération interne est telle que :

$$\begin{aligned} p_{\Psi_i} : \mathcal{W} &\longrightarrow X \\ \omega &\longrightarrow p_{\Psi_i}(\omega) \end{aligned}$$

A partir de la fonction de pondération interne, nous définissons un pré-ordre interne pour un état épistémique  $\Psi_i$ , noté  $\leq_{\Psi_i}$ .

**Définition 62** Un pré-ordre interne représentant les priorités au sein d'un état épistémique est défini par :

$$\forall \omega_j, \omega_k \in \mathcal{W}, \omega_j \leq_{\Psi_i} \omega_k \text{ si et seulement si } p_{\Psi_i}(\omega_j) \leq_X p_{\Psi_i}(\omega_k)$$

L'ensemble  $X$  doit être totalement pré-ordonné et posséder un élément minimal. Les ensembles courants  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}^+$  ou l'intervalle des réels  $[0, 1]$  respectent par exemple cette condition et peuvent être utilisés dans la définition de fonctions de pondération. La notion de fonction de pondération permet d'ordonner les croyances selon les priorités entre celles-ci. Le choix de la fonction de pondération permet de représenter différentes sortes de priorités. La nature implicite ou explicite des priorités internes influe sur la définition d'une fonction de pondération.

#### Priorités explicite

Si un expert exprime des priorités explicites pour un état épistémique  $\Psi_i$ , cela induit la construction d'un pré-ordre arbitraire sur les interprétations de l'état épistémique  $\Psi_i$ . La fonction de pondération utilisée dépend alors du moyen qu'a utilisé l'expert pour exprimer les priorités entre les croyances. Si l'expert a fourni directement un pré-ordre entre les interprétations, la fonction de pondération interne  $p_{\Psi_i}$  est telle qu'elle retourne pour chaque interprétation  $\omega$  son rang dans le pré-ordre  $\leq_{\Psi_i}$ . Si l'expert veut quantifier les priorités, il fournit alors lui-même les pondérations associées à chaque interprétation en définissant la fonction  $p_{\Psi_i}$  en extension.

Les deux méthodes de définition de priorités explicites correspondent à des cas réels différents. Si seule la priorité est importante, alors construire une fonction de pondération à partir d'un pré-ordre sur les interprétations est une solution adaptée. Cependant, si les priorités doivent être quantifiées, la définition d'une fonction de pondération représentant une distribution de poids associés aux interprétations se révèle être plus intéressante. L'exemple suivant illustre la représentation de priorités explicites.

**Exemple 8** *Inspirons nous de l'exemple donné dans [73]. Un professeur demande à ses étudiants de choisir les langages de programmation qu'ils voudraient étudier. Les langages proposés sont : SQL noté  $s$ ,  $O_2$  noté  $o$ , et Datalog noté  $d$ . Quand tous les étudiants ont répondu, les choix peuvent être répartis en trois groupes dont les vœux sont :*

- $S_1$  : Apprendre SQL ou  $O_2$  mais pas Datalog
- $S_2$  : Apprendre seulement Datalog ou seulement  $O_2$
- $S_3$  : Apprendre SQL,  $O_2$  et Datalog

*A partir de ces groupes, nous pouvons construire trois états épistémiques dont les croyances observables sont représentées respectivement par les bases propositionnelles suivantes :*

$$\begin{aligned} K_1 &= \{(s \vee o) \wedge \neg d\} \\ K_2 &= \{(\neg s \wedge d \wedge \neg o) \vee (\neg s \wedge \neg d \wedge o)\} \\ K_3 &= \{s \wedge o \wedge d\} \end{aligned}$$

*L'ensemble des interprétations  $\mathcal{W}$  est :*

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \{\neg s, \neg d, \neg o\} \\ \omega_1 &= \{\neg s, \neg d, o\} \\ \omega_2 &= \{\neg s, d, \neg o\} \\ \omega_3 &= \{\neg s, d, o\} \\ \omega_4 &= \{s, \neg d, \neg o\} \\ \omega_5 &= \{s, \neg d, o\} \\ \omega_6 &= \{s, d, \neg o\} \\ \omega_7 &= \{s, d, o\} \end{aligned}$$

*Chaque groupe a exprimé des priorités sur les informations. Celles-ci constituent l'ensemble des priorités pour chaque état épistémique. Les élèves du groupe  $S_1$  ne souhaitent absolument pas apprendre Datalog mais préfèrent apprendre SQL plutôt que  $O_2$ . Cela peut être représenté par le pré-ordre :*

$$\omega_4 =_{\Psi_1} \omega_5 <_{\Psi_1} \omega_1 <_{\Psi_1} \omega_0 <_{\Psi_1} \omega_3 =_{\Psi_1} \omega_6 =_{\Psi_1} \omega_7 <_{\Psi_1} \omega_2$$

*Les élèves du groupe  $S_2$  souhaitent apprendre seulement Datalog ou seulement  $O_2$  mais préfèrent ne pas apprendre SQL. D'où le pré-ordre :*

$$\omega_1 =_{\Psi_2} \omega_2 <_{\Psi_2} \omega_0 <_{\Psi_2} \omega_3 <_{\Psi_2} \omega_4 =_{\Psi_2} \omega_5 =_{\Psi_2} \omega_6 <_{\Psi_2} \omega_7$$

*Pour finir, les élèves du groupe 3 souhaitent apprendre le maximum de langages. Le pré-ordre sur les interprétations est alors :*

$$\omega_7 <_{\Psi_3} \omega_3 =_{\Psi_3} \omega_5 =_{\Psi_3} \omega_6 <_{\Psi_3} \omega_1 =_{\Psi_3} \omega_2 =_{\Psi_3} \omega_4 <_{\Psi_3} \omega_0$$

*Les fonctions de pondération internes étant basées sur le rang des interprétations dans le pré-ordre, l'ensemble  $X$  des valeurs des fonctions  $p_{\Psi_1}$ ,  $p_{\Psi_2}$  et  $p_{\Psi_3}$  est l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$ . Ces trois fonctions sont définies respectivement par :*

$p_{\Psi_1}(\omega_0) = 2$	$p_{\Psi_2}(\omega_0) = 1$	$p_{\Psi_3}(\omega_0) = 3$
$p_{\Psi_1}(\omega_1) = 1$	$p_{\Psi_2}(\omega_1) = 0$	$p_{\Psi_3}(\omega_1) = 2$
$p_{\Psi_1}(\omega_2) = 4$	$p_{\Psi_2}(\omega_2) = 0$	$p_{\Psi_3}(\omega_2) = 2$
$p_{\Psi_1}(\omega_3) = 3$	$p_{\Psi_2}(\omega_3) = 2$	$p_{\Psi_3}(\omega_3) = 1$
$p_{\Psi_1}(\omega_4) = 0$	$p_{\Psi_2}(\omega_4) = 3$	$p_{\Psi_3}(\omega_4) = 2$
$p_{\Psi_1}(\omega_5) = 0$	$p_{\Psi_2}(\omega_5) = 3$	$p_{\Psi_3}(\omega_5) = 1$
$p_{\Psi_1}(\omega_6) = 3$	$p_{\Psi_2}(\omega_6) = 3$	$p_{\Psi_3}(\omega_6) = 1$
$p_{\Psi_1}(\omega_7) = 3$	$p_{\Psi_2}(\omega_7) = 4$	$p_{\Psi_3}(\omega_7) = 0$

En utilisant la définition du pré-ordre interne :

$$\forall \omega_j, \omega_k \in \mathcal{W}, \omega_j \leq_{\Psi_i} \omega_k \text{ si et seulement si } p_{\Psi_i}(\omega_j) \leq p_{\Psi_i}(\omega_k)$$

Nous retrouvons les pré-ordres internes définis explicitement :

$$\leq_{\Psi_1}: \omega_4 =_{\Psi_1} \omega_5 <_{\Psi_1} \omega_1 <_{\Psi_1} \omega_0 <_{\Psi_1} \omega_3 =_{\Psi_1} \omega_6 =_{\Psi_1} \omega_7 <_{\Psi_1} \omega_2$$

$$\leq_{\Psi_2}: \omega_1 =_{\Psi_2} \omega_2 <_{\Psi_2} \omega_0 <_{\Psi_2} \omega_3 <_{\Psi_2} \omega_4 =_{\Psi_2} \omega_5 =_{\Psi_2} \omega_6 <_{\Psi_2} \omega_7$$

$$\leq_{\Psi_3}: \omega_7 <_{\Psi_3} \omega_3 =_{\Psi_3} \omega_5 =_{\Psi_3} \omega_6 <_{\Psi_3} \omega_1 =_{\Psi_3} \omega_2 =_{\Psi_3} \omega_4 <_{\Psi_3} \omega_0$$

### Priorités implicites

Les priorités implicites sur les informations sont définies en intention. C'est à dire que l'expert peut fournir des critères permettant de déterminer des priorités entre les informations. L'agent exprime ces priorités au moyen d'une fonction de pondération calculant un poids en fonction des critères voulus. Un exemple simple est de prendre comme fonction de pondération la distance de Hamming<sup>1</sup> dont le critère de priorité est la proximité d'une interprétation avec un modèle de la base propositionnelle à laquelle elle est associée. L'exemple 9 illustre la représentation de priorités internes implicites par un pré-ordre basé sur une fonction de pondération.

**Exemple 9** Reprenons l'exemple 8 de la page 66 dans lequel  $E = \{K_1, K_2, K_3\}$  est un ensemble de bases propositionnelles représentant les croyances observables d'un ensemble d'états épistémiques. L'ensemble  $E$  est défini par :

$$\begin{aligned} K_1 &= \{(s \vee o) \wedge \neg d\} \\ K_2 &= \{(\neg s \wedge d \wedge \neg o) \vee (\neg s \wedge \neg d \wedge o)\} \\ K_3 &= \{s \wedge o \wedge d\} \end{aligned}$$

Nous définissons comme fonctions de pondération  $p_{\Psi_i}$  des fonctions basées sur la distance de Hamming. L'ensemble des valeurs des fonctions  $p_{\Psi_i}$  est alors l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  muni de la relation de pré-ordre usuelle. L'ensemble des modèles de  $K_1$  est tel que :

$$Mod(K_1) = \{\omega_1, \omega_4, \omega_5\}$$

La fonction de pondération interne basée sur la distance de Hamming est définie par<sup>2</sup> :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, p_{\Psi_i}(\omega) = d_H(\omega, K_i) = \min_{\omega' \in Mod(K_i)} (d_H(\omega, \omega'))$$

Les valeurs de la fonction  $p_{\Psi_1}$  sont alors :

$$\begin{aligned} p_{\Psi_1}(\omega_0) &= d_H(\omega_0, K_1) = d_H(\omega_0, \omega_3) = 1 \\ p_{\Psi_1}(\omega_1) &= d_H(\omega_1, K_1) = d_H(\omega_1, \omega_1) = 0 \\ p_{\Psi_1}(\omega_2) &= d_H(\omega_2, K_1) = d_H(\omega_2, \omega_3) = 2 \\ p_{\Psi_1}(\omega_3) &= d_H(\omega_3, K_1) = d_H(\omega_3, \omega_3) = 1 \\ p_{\Psi_1}(\omega_4) &= d_H(\omega_4, K_1) = d_H(\omega_4, \omega_4) = 0 \\ p_{\Psi_1}(\omega_5) &= d_H(\omega_5, K_1) = d_H(\omega_5, \omega_5) = 0 \\ p_{\Psi_1}(\omega_6) &= d_H(\omega_6, K_1) = d_H(\omega_6, \omega_6) = 1 \\ p_{\Psi_1}(\omega_7) &= d_H(\omega_7, K_1) = d_H(\omega_7, \omega_7) = 1 \end{aligned}$$

Le pré-ordre  $\leq_{\Psi_1}$  correspondant est :

$$\omega_1 =_{\Psi_1} \omega_4 =_{\Psi_1} \omega_5 <_{\Psi_1} \omega_0 =_{\Psi_1} \omega_3 =_{\Psi_1} \omega_6 =_{\Psi_1} \omega_7 <_{\Psi_1} \omega_2$$

---

<sup>1</sup> Voir la section 4.4.2 page 44

<sup>2</sup> La définition de la distance de Hamming est donnée en section 4.4.2, page 44.

De même pour la base propositionnelle  $K_2$ , avec pour modèle  $Mod(K_2) = \{\omega_1, \omega_2\}$ , la fonction de pondération interne  $p_{\Psi_2}$  est telle que :

$$\begin{aligned} p_{\Psi_2}(\omega_0) &= d_H(\omega_0, K_2) = d_H(\omega_0, \omega_1) = 1 \\ p_{\Psi_2}(\omega_1) &= d_H(\omega_1, K_2) = d_H(\omega_1, \omega_1) = 0 \\ p_{\Psi_2}(\omega_2) &= d_H(\omega_2, K_2) = d_H(\omega_2, \omega_2) = 0 \\ p_{\Psi_2}(\omega_3) &= d_H(\omega_3, K_2) = d_H(\omega_3, \omega_2) = 1 \\ p_{\Psi_2}(\omega_4) &= d_H(\omega_4, K_2) = d_H(\omega_4, \omega_1) = 2 \\ p_{\Psi_2}(\omega_5) &= d_H(\omega_5, K_2) = d_H(\omega_5, \omega_1) = 1 \\ p_{\Psi_2}(\omega_6) &= d_H(\omega_6, K_2) = d_H(\omega_6, \omega_2) = 1 \\ p_{\Psi_2}(\omega_7) &= d_H(\omega_7, K_2) = d_H(\omega_7, \omega_1) = 2 \end{aligned}$$

Le pré-ordre  $\leq_{\Psi_2}$  correspondant est :

$$\omega_1 =_{\Psi_2} \omega_2 <_{\Psi_2} \omega_0 =_{\Psi_2} \omega_3 =_{\Psi_2} \omega_5 =_{\Psi_2} \omega_6 <_{\Psi_2} \omega_4 =_{\Psi_2} \omega_7$$

La base propositionnelle  $K_3$  ayant pour modèle  $Mod(K_3) = \{\omega_7\}$ , la fonction de pondération interne  $p_{\Psi_3}$  est définie par :

$$\begin{aligned} p_{\Psi_3}(\omega_0) &= d_H(\omega_0, K_3) = d_H(\omega_0, \omega_7) = 3 \\ p_{\Psi_3}(\omega_1) &= d_H(\omega_1, K_3) = d_H(\omega_1, \omega_7) = 2 \\ p_{\Psi_3}(\omega_2) &= d_H(\omega_2, K_3) = d_H(\omega_2, \omega_7) = 2 \\ p_{\Psi_3}(\omega_3) &= d_H(\omega_3, K_3) = d_H(\omega_3, \omega_7) = 1 \\ p_{\Psi_3}(\omega_4) &= d_H(\omega_4, K_3) = d_H(\omega_4, \omega_7) = 2 \\ p_{\Psi_3}(\omega_5) &= d_H(\omega_5, K_3) = d_H(\omega_5, \omega_7) = 1 \\ p_{\Psi_3}(\omega_6) &= d_H(\omega_6, K_3) = d_H(\omega_6, \omega_7) = 1 \\ p_{\Psi_3}(\omega_7) &= d_H(\omega_7, K_3) = d_H(\omega_7, \omega_7) = 0 \end{aligned}$$

Le pré-ordre  $\leq_{\Psi_3}$  obtenu est :

$$\omega_7 <_{\Psi_3} \omega_3 =_{\Psi_3} \omega_5 =_{\Psi_3} \omega_6 <_{\Psi_3} \omega_1 =_{\Psi_3} \omega_2 =_{\Psi_3} \omega_4 <_{\Psi_3} \omega_0$$

### Priorités non définies

Lors d'une session de mesure, il est possible que l'expert ne soit pas en mesure de proposer des priorités sur les informations. L'absence de priorité peut être vue comme une priorité uniforme sur toutes les interprétations. Cela signifie que toutes les interprétations sont prioritaires. Nous avons alors :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, p_{\Psi_i}(\omega) = k, k \in \min(X, \leq_X)$$

Si malgré l'absence de priorités il est nécessaire d'ordonner les interprétations, il est possible de définir des priorités à partir de critères indépendants du contexte d'où proviennent les croyances. Ces priorités peuvent alors être définies arbitrairement ou résulter d'une méthode de sélection basée sur la satisfaction des formules de la base propositionnelle. Nous sommes donc ramenés à des définitions explicites ou implicites. Un exemple de définition implicite et de choisir comme méthode de rendre prioritaire les modèles d'une base propositionnelle par rapport aux autres interprétations. Cette méthode induit la définition de la fonction  $p_{\Psi_i}$  ayant pour ensemble de définition le corps  $\mathbb{F}_2$  telle que :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, p_{\Psi_i}(\omega) = 0 \text{ si } \omega \in Mod(K_i) \text{ et } p_{\Psi_i}(\omega) = 1 \text{ sinon}$$

L'exemple suivant illustre le calcul des poids internes pour une base propositionnelle sans aucune définition de priorité.

**Exemple 10** Soit  $E$  l'ensemble de bases propositionnelles de l'exemple précédent. Les modèles de  $K_1$  sont tels que  $Mod(K_1) = \{\omega_1, \omega_4, \omega_5\}$ . En l'absence de priorités internes, nous utilisons comme fonction de pondération la fonction qui associe le poids 0 au modèle d'une base et le poids 1 aux autres interprétations. La

fonction  $p_{\Psi_1}$  est définie par :

$$\begin{aligned} p_{\Psi_1}(\omega_0) &= 1 \\ p_{\Psi_1}(\omega_1) &= 0 \\ p_{\Psi_1}(\omega_2) &= 1 \\ p_{\Psi_1}(\omega_3) &= 1 \\ p_{\Psi_1}(\omega_4) &= 0 \\ p_{\Psi_1}(\omega_5) &= 0 \\ p_{\Psi_1}(\omega_6) &= 1 \\ p_{\Psi_1}(\omega_7) &= 1 \end{aligned}$$

Le pré-ordre  $\leq_{\Psi_1}$  correspondant est :

$$\omega_1 =_{\Psi_1} \omega_4 =_{\Psi_1} \omega_5 <_{\Psi_1} \omega_0 =_{\Psi_1} \omega_3 =_{\Psi_1} \omega_6 =_{\Psi_1} \omega_7 =_{\Psi_1} \omega_2$$

De même pour  $K_2$  dont l'ensemble des modèles est  $Mod(K_2) = \{\omega_1, \omega_2\}$ , la fonction  $p_{\Psi_2}$  est définie par :

$$\begin{aligned} p_{\Psi_2}(\omega_0) &= 1 \\ p_{\Psi_2}(\omega_1) &= 0 \\ p_{\Psi_2}(\omega_2) &= 0 \\ p_{\Psi_2}(\omega_3) &= 1 \\ p_{\Psi_2}(\omega_4) &= 1 \\ p_{\Psi_2}(\omega_5) &= 1 \\ p_{\Psi_2}(\omega_6) &= 1 \\ p_{\Psi_2}(\omega_7) &= 1 \end{aligned}$$

Le pré-ordre  $\leq_{\Psi_2}$  correspondant est :

$$\omega_1 =_{\Psi_2} \omega_2 <_{\Psi_2} \omega_0 =_{\Psi_2} \omega_3 =_{\Psi_2} \omega_4 =_{\Psi_2} \omega_5 =_{\Psi_2} \omega_6 =_{\Psi_2} \omega_7$$

Pour finir, l'ensemble des modèles de la base  $K_3$  étant  $Mod(K_3) = \{\omega_7\}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} p_{\Psi_3}(\omega_0) &= 1 \\ p_{\Psi_3}(\omega_1) &= 1 \\ p_{\Psi_3}(\omega_2) &= 1 \\ p_{\Psi_3}(\omega_3) &= 1 \\ p_{\Psi_3}(\omega_4) &= 1 \\ p_{\Psi_3}(\omega_5) &= 1 \\ p_{\Psi_3}(\omega_6) &= 1 \\ p_{\Psi_3}(\omega_7) &= 0 \end{aligned}$$

Le pré-ordre  $\leq_{\Psi_3}$  correspondant est :

$$\omega_7 <_{\Psi_3} \omega_2 =_{\Psi_3} \omega_0 =_{\Psi_3} \omega_3 =_{\Psi_3} \omega_4 =_{\Psi_3} \omega_5 =_{\Psi_3} \omega_6 =_{\Psi_3} \omega_1$$

### 6.3.3 Pré-ordre externe

Un pré-ordre externe entre des états épistémiques représente une priorité entre les sources d'informations représentées par ces états. La définition d'un pré-ordre externe repose sur la définition d'une fonction de pondération externe pour un ensemble d'états épistémiques.

**Définition 63** Soit  $\mathcal{C} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  un ensemble de couples représentant l'ensemble d'états épistémiques  $\Psi = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}$ . Soit  $Y$  un ensemble totalement pré-ordonné par la relation  $\leq_Y$  et possédant un élément minimal pour  $\leq_Y$ . Une fonction de pondération externe est une application  $q_C$  telle que :

$$\begin{aligned} q_C : \mathcal{C} &\longrightarrow Y \\ \xi_i &\longrightarrow q_C(\xi_i) \end{aligned}$$



A partir de la fonction de pondération externe, nous définissons un pré-ordre externe sur l'ensemble des couples représentant sémantiquement les états épistémiques, noté  $\leq_C$ .

**Définition 64** *Un pré-ordre externe sur un ensemble de couples  $\mathcal{C}$  est défini par :*

$$\forall \xi_i, \xi_j \in \mathcal{C}, \xi_i \leq_C \xi_j \text{ ssi } q_C(\xi_i) \leq_Y q_C(\xi_j)$$

Comme pour la représentation de pré-ordres internes, le pré-ordre externe peut être défini explicitement, implicitement ou ne pas être défini.

**Pré-ordre externe défini explicitement :** Si le pré-ordre  $\leq_C$  est défini explicitement, les experts peuvent soit fournir un pré-ordre sur les états épistémiques soit une distribution de poids attachés aux états et un ordre sur ceux-ci. Ces deux méthodes permettent de définir respectivement un pré-ordre explicite exprimé qualitativement et un pré-ordre explicite exprimé quantitativement. Si le pré-ordre est explicitement défini qualitativement, les valeurs de la fonction de pondération  $q_C$  sont les valeurs des rangs des couples  $\xi_i$  dans le pré-ordre  $\leq_C$  donné. Pour un pré-ordre défini quantitativement, les valeurs de la fonction  $q_C$  sont fournies directement.

**Pré-ordre externe défini implicitement :** Si des critères sont disponibles pour exprimer des priorités entre les états épistémiques  $\Psi_i$ , le pré-ordre  $\leq_C$  est alors défini implicitement. La fonction de pondération  $q_C$  est la fonction formalisant les critères de priorité et renvoyant un poids en fonction de chaque état épistémique. Les valeurs de ces poids peuvent être des entiers naturels de  $\mathbb{N}$  pour représenter des rangs ou encore des nombres réels positifs de  $\mathbb{R}^+$ , pour représenter par exemple des degrés de priorités normalisés (des réels entre 0 et 1 par exemple).

**Priorités externes non définies :** Si aucune priorité n'a été définie entre les états épistémiques de  $\Psi$ , nous pouvons en déduire que tous les états épistémiques sont prioritaires. Cela se traduit par un pré-ordre  $\leq_C$  dans lequel toutes les bases sont au même niveau. La fonction de pondération permettant de représenter ce type de pré-ordre est définie telle que :

$$\forall \xi_i \in \mathcal{C}, q_C(\xi_i) = \min(Y, \leq_Y)$$

Dans la plupart des cas,  $Y = \mathbb{N}^*$  et  $\min(Y, \leq_Y) = 1$ .

## 6.4 Représentation syntaxique

La représentation syntaxique d'états épistémiques en logique propositionnelle repose sur les formules propositionnelles. Chaque état épistémique est alors représenté par une base de croyances stratifiée pour laquelle un pré-ordre interne est défini sur les formules. Les priorités entre les états épistémiques sont représentées par un pré-ordre sur les bases de croyances stratifiées.

### 6.4.1 Ensemble de base de croyances stratifiées

La représentation syntaxique d'un état épistémique  $\Psi_i$  est une base de croyances stratifiée  $\Sigma_i$  composée de formules propositionnelles pondérées. Formellement :

**Définition 65** *Soit  $X$  un ensemble muni d'une relation de pré-ordre total  $\leq_X$  et ayant un élément minimal pour  $\leq_X$ . Une base de croyances stratifiée, notée  $\Sigma_i$  est un ensemble de couples composés d'une formule de  $\mathcal{L}_{pc}$  et d'un poids, noté  $p_{\Sigma_i}(\phi_k)$ , tels que :*

$$\Sigma_i = \{(\phi_k, p_{\Sigma_i}(\phi_k)), \phi_k \in \mathcal{L}_{pc}, p_{\Sigma_i}(\phi_k) \in X\}$$

On note  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$  un ensemble de bases de croyances stratifiées où chaque  $\Sigma_i$  est une base de croyances stratifiée au sens de la définition 65.

### 6.4.2 Pré-ordre interne

La définition de base stratifiée donnée ci-dessus induit déjà la notion de pré-ordre interne reposant sur les poids associés formules. Ces poids permettent de représenter les priorités entre les croyances grâce à un pré-ordre sur les formules assimilé au pré-ordre sur leurs poids. Ces poids peuvent être définis comme les valeurs d'une fonction de pondération. Formellement :

**Définition 66** Soit  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$  un ensemble de bases de croyances stratifiées et  $X$  un ensemble muni d'un pré-ordre total  $\leq_X$ . Une fonction de pondération interne est telle que :

$$\begin{array}{ccc} p_{\Sigma_i} : & \Sigma_i & \longrightarrow X \\ & \phi & \longrightarrow p_{\Sigma_i}(\phi) \end{array}$$

A partir de la fonction de pondération interne, nous définissons un pré-ordre interne sur une base de croyances  $\Sigma_i$ , noté  $\leq_{\Sigma_i}$ .

**Définition 67** Un pré-ordre interne sur les formules d'une base de croyances stratifiée  $\Sigma_i$  attachée à une fonction de pondération  $p_{\Sigma_i}$  est défini par :

$$\forall \phi_k, \phi_l \in \Sigma_i, \phi_k \leq_{\Sigma_i} \phi_l \text{ ssi } p_{\Sigma_i}(\phi_k) \leq_X p_{\Sigma_i}(\phi_l)$$

La notion de fonction de pondération permet d'ordonner les formules en suivant les priorités entre les croyances. Dans l'approche syntaxique, les formules prioritaires sont les formules maximales dans le pré-ordre interne. Plusieurs types de priorités peuvent être représentées grâce au choix de la fonction de pondération  $p_{\Sigma_i}$ .

#### Priorités explicite

Dans l'approche syntaxique, de par la nature des bases de croyances stratifiées, les priorités entre les formules sont données par la stratification. Celle-ci peut être construite à partir d'une fonction de pondération renvoyant un ensemble de poids que l'agent définit en arbitrairement.

Dans certains cas, la valeur de pondération est importante (comme par exemple pour spécifier un degré de priorité). Les valeurs de la fonction de pondération peuvent alors être directement exprimées par l'expert, comme l'illustre l'exemple suivant :

**Exemple 11** Soit  $\Sigma_1$  une base de croyance stratifiée telle que :

$$\Sigma_1 = \{(\phi_1, p_{\Sigma_1}(\phi_1)), (\phi_2, p_{\Sigma_1}(\phi_2)), (\phi_3, p_{\Sigma_1}(\phi_3)), (\phi_4, p_{\Sigma_1}(\phi_4)), (\phi_5, p_{\Sigma_1}(\phi_5))\}$$

avec :

$$\begin{array}{ll} \phi_1 & = \neg d \\ \phi_2 & = s \vee o \\ \phi_3 & = \neg s \vee \neg d \\ \phi_4 & = \neg s \vee \neg d \vee \neg o \\ \phi_5 & = s \vee \neg d \vee o \end{array}$$

L'expert exprime des priorités sur les formules que l'agent représente par le pré-ordre

$$\phi_1 =_{\Sigma_1} \phi_2 =_{\Sigma_1} \phi_3 =_{\Sigma_1} \phi_4 <_{\Sigma_1} \phi_5$$

Les poids associés aux formules sont alors :

$$\begin{array}{ll} p_{\Sigma_1}(\phi_1) & = 0 \\ p_{\Sigma_1}(\phi_2) & = 0 \\ p_{\Sigma_1}(\phi_3) & = 0 \\ p_{\Sigma_1}(\phi_4) & = 0 \\ p_{\Sigma_1}(\phi_5) & = 1 \end{array}$$

### Priorités implicites

Il n'est pas possible de parler de priorités implicites dans l'approche syntaxique. En effet, les formules composant les bases de croyances stratifiées sont toutes attachées à un poids défini lors de leur construction. Il est néanmoins possible de parler de priorité implicites si l'agent utilise des fonctions de pondérations basées sur des critères particuliers lors de la création des bases de croyances stratifiées. Les poids attachés aux formules par l'agent sont toujours donnés explicitement par celui-ci, mais la détermination des poids par l'agent est quand à elle implicite.

### Priorités non définies

Si l'agent n'est pas en mesure d'exprimer des priorités sur un ensemble de formules, la base de croyances stratifiée est alors construite avec une seule strate. Toutes les formules sont prioritaires. Nous avons alors :  $\forall \phi \in \Sigma_i, p_{\Sigma_i}(\phi) = \min(X, \leq_X)$ . Dans la plupart des cas cela se résume à  $\forall \phi \in \Sigma_i, p_{\Sigma_i}(\phi) = 0$

### 6.4.3 Pré-ordre externe

La définition formelle d'un pré-ordre externe repose sur la définition d'une fonction de pondération externe pour un ensemble de bases de croyances stratifiées.

**Définition 68** Soit  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$  un ensemble de bases de croyances stratifiées et soit  $Y$  un ensemble totalement pré-ordonné par la relation  $\leq_Y$ . Une fonction de pondération externe, notée  $q$  est une application telle que :

$$\begin{aligned} q : \quad \mathcal{B} &\longrightarrow Y \\ \Sigma_i &\longrightarrow q_{\mathcal{B}}(\Sigma_i) \end{aligned}$$

A partir de la fonction de pondération externe, nous définissons un pré-ordre externe sur l'ensemble des bases de croyances stratifiées, noté  $\leq_{\mathcal{B}}$ .

**Définition 69** Un pré-ordre externe sur un ensemble de bases pondérées  $\mathcal{B}$  est défini par :

$$\forall \Sigma_i, \Sigma_j \in \mathcal{B}, \Sigma_i \leq_{\mathcal{B}} \Sigma_j \text{ ssi } q_{\mathcal{B}}(\Sigma_i) \leq_Y q_{\mathcal{B}}(\Sigma_j)$$

Deux cas se présentent. Soit les sources sont ordonnées explicitement. Dans ce cas les poids  $q_{\mathcal{B}}(\Sigma_i)$  sont codés par des constantes. Soit les sources ne sont pas ordonnées. Toutes les bases sont donc préférées, et dans ce cas,  $q$  est telle que  $\forall \Sigma_i \in \mathcal{B}, q_{\mathcal{B}}(\Sigma_i) = \min(Y, \leq_Y)$ , c'est à dire la même constante. Dans la plupart des cas cela se résume à  $\forall \Sigma_i \in \mathcal{B}, q_{\mathcal{B}}(\Sigma_i) = \min(Y, \leq_Y)$ . Dans la plupart des cas,  $Y = \mathbb{N}^*$  et  $\min(Y, \leq_Y) = 1$ .

## 6.5 Équivalence entre représentations sémantique et syntaxique.

Nous présentons maintenant l'équivalence des approches sémantique et syntaxique pour la représentation d'état épistémiques. Cette équivalence est basée sur la capacité à construire la représentation syntaxique d'un état épistémique à partir de sa représentation sémantique ainsi que la capacité à construire la représentation sémantique d'un état épistémique à partir de sa représentation syntaxique.

L'intérêt de cette équivalence est de permettre de définir des fonctions de pondérations et des pré-ordres au niveau sémantique, qui offre plus d'expressivité, et de les utiliser au niveau syntaxique, qui est plus adapté à l'inférence et pour lequel de nombreux algorithmes d'inférence et de détection d'incohérences sont définis.

L'équivalence entre les approches sémantique et syntaxique est basée sur la notion de fonction, notée *kappa*, utilisée en logique possibiliste [13] et dans le Système Z [69]. Cette fonction fait correspondre à une interprétation  $\omega \in \mathcal{W}$  le poids maximum des formules falsifiées par  $\omega$ . Plus formellement :

### Définition 70

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, \kappa_{\Sigma_i}(\omega) = \max(\{p_{\Sigma_i}(\phi), (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i \text{ et } \omega \not\models \phi\})$$

Pour que les représentations sémantiques et syntaxiques d'un état épistémique  $\Psi_i$  soient équivalentes, il faut que pour toute interprétation  $\omega$  du langage, la valeur de la fonction  $\kappa$  pour  $\omega$  soit égale à la valeur du poids de  $\omega$  utilisé pour représenter le pré-ordre  $\leq_{\Psi_i}$ . Formellement, soit  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$  la représentation sémantique d'un état épistémique et soit  $\Sigma_i$  une base de croyances stratifiée. Soit  $\kappa$  est la fonction définie en 70 faisant correspondre  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$  et  $\Sigma_i$ . Les représentations  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$  et  $\Sigma_i$  sont équivalentes si et seulement si :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, \kappa_{\Sigma_i}(\omega) = p_{\Psi_i}(\omega)$$

Nous montrons maintenant comment passer automatiquement d'une représentation syntaxique à une représentation sémantique puis comment passer d'une représentation sémantique à une représentation syntaxique. Nous étudions pour cela tout d'abord la notion de contrepartie sémantique d'une base de croyances stratifiée puis ensuite la notion de contrepartie syntaxique d'une base propositionnelle.

### 6.5.1 De la représentation syntaxique à la représentation sémantique

Soit  $\Sigma_i$  une base de croyances stratifiée. Notons  $X$  l'ensemble contenant les valeurs des poids  $p_{\Sigma_i}$  associés aux formules de  $\Sigma_i$  et notons  $\leq_X$  le pré-ordre total sur l'ensemble  $X$ . Le couple  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$  est la contrepartie sémantique de  $\Sigma_i$  si pour toute les interprétations de l'ensemble  $\mathcal{W}$  la fonction  $\kappa$  est vérifiée.

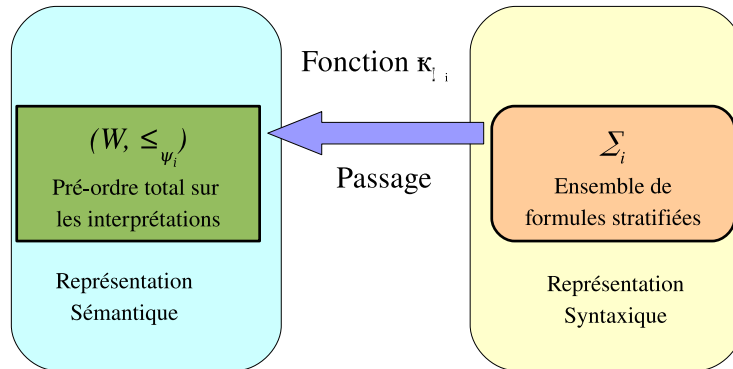


FIG. 6.5 – Passage d'une représentation syntaxique d'un état épistémique à une représentation sémantique.

Comme l'illustre la figure 6.5, nous proposons maintenant de construire  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$  à partir d'une base de croyances pondérée  $\Sigma_i$ . Pour cela, nous construisons un pré-ordre sur les interprétations  $\leq_{\Psi_i}$  basé sur une fonction de pondération  $p_{\Psi_i}$  définie selon la fonction  $\kappa$ . formellement :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, p_{\Psi_i}(\omega) = \max(\{p_{\Sigma_i}(\phi), (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i \text{ et } \omega \models \phi\})$$

La construction d'une telle base propositionnelle est triviale. Une fois l'ensemble des interprétations du langage construit, à chaque interprétation  $\omega$  nous associons le poids  $p_{\Sigma_i}(\phi)$  de la formule pondérée  $(\phi, p_{\Sigma_i}(\phi))$  de  $\Sigma_i$  falsifiée par  $\omega$  et dont le poids est maximal suivant le pré-ordre  $\leq_{\Sigma_i}$ . Si une interprétation ne falsifie aucune formule de  $\Sigma_i$ , par convention nous lui attribuons le poids  $p_{\Psi_i}(\omega) = \min(X, \leq_X)$ . C'est à dire dans la plupart des cas 0.

A partir de l'ensemble des couples  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$  construits, nous pouvons également construire l'ensemble des croyances observables  $E = \{K_1, \dots, K_n\}$  avec :

$$\forall K_i \in E, \text{Mod}(K_i) = \text{Mod}(\text{Bel}(\Psi)) = \min(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$$

Après la construction de tous les couples  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$  à partir des bases de croyances stratifiées  $\Sigma_i$ , nous achevons la construction de l'ensemble d'états épistémiques en le munissant d'un pré-ordre  $\leq_C$  identique au pré-ordre  $\leq_B$ . Pour cela, nous définissons la fonctions de pondération externe  $q_B(\Sigma_i) = q_C(\xi_i)$ . L'ensemble des valeurs de  $q_B(\Sigma_i)$  et de  $q_C(\xi_i)$  étant  $Y$ , muni du pré-ordre total  $\leq_Y$ , le préordre sur les couples  $\xi_i$  est défini par :

$$\forall \xi_i, \xi_j \in \mathcal{C}, \quad \xi_i \leq_C \xi_j \text{ si et seulement si } q_C(\xi_i) \leq_Y q_C(\xi_j)$$

L'exemple suivant illustre la construction d'un ensemble de bases propositionnelles à partir d'un ensemble de bases de croyances stratifiées.

**Exemple 12** Soit  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$  un ensemble de bases de croyances stratifiées représentant l'ensemble d'état épistémiques  $\Psi = \{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$  tel que :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{(\neg d, 1), (s \vee o, 1), (\neg s \vee \neg d, 1), (\neg s \vee \neg d \vee \neg o, 1), (s \vee \neg d \vee o, 2)\} \\ \Sigma_2 &= \{(\neg s, 1), (d \vee o, 1), (\neg d \vee \neg o, 1), (\neg s \vee \neg d, 1), (\neg s \vee \neg d \vee \neg o, 2), \\ &\quad (\neg s \vee \neg d \vee \neg o, 2)\} \\ \Sigma_3 &= \{(s, 1), (d, 1), (o, 1), (s \vee d, 2), (d \vee o, 2), (s \vee o, 2), (s \vee d \vee o, 3)\} \end{aligned}$$

La fonction de pondération externe pour  $\mathcal{B}$  est définie de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathbb{N}^*$  par :

$$\begin{aligned} q_B(\Sigma_1) &= 1 \\ q_B(\Sigma_2) &= 1 \\ q_B(\Sigma_3) &= 2 \end{aligned}$$

Le pré-ordre externe sur les bases de croyances stratifiées est :

$$\Sigma_1 =_B \Sigma_2 <_B \Sigma_3$$

L'ensemble des valeurs des poids  $p_{\Sigma_i}$  est l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  muni du pré-ordre usuel  $\leq$ .

Nous construisons pour chaque base  $\Sigma_i$  la contrepartie sémantique  $K_i$  correspondante. L'ensemble des interprétations  $\mathcal{W}$  est défini par :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \{\neg s, \neg d, \neg o\} \\ \omega_1 &= \{\neg s, \neg d, o\} \\ \omega_2 &= \{\neg s, d, \neg o\} \\ \omega_3 &= \{\neg s, d, o\} \\ \omega_4 &= \{s, \neg d, \neg o\} \\ \omega_5 &= \{s, \neg d, o\} \\ \omega_6 &= \{s, d, \neg o\} \\ \omega_7 &= \{s, d, o\} \end{aligned}$$

Notons  $F_{\Sigma_i}(\omega)$  les ensembles des formules des  $\Sigma_i$  falsifiées par une interprétation  $\omega$ . Nous avons pour  $\Sigma_1$  :

$$\begin{aligned} F_{\Sigma_1}(\omega_0) &= \{(s \vee o, 1)\} \\ F_{\Sigma_1}(\omega_1) &= \emptyset \\ F_{\Sigma_1}(\omega_2) &= \{(s \vee o, 1), (s \vee \neg d \vee o, 2)\} \\ F_{\Sigma_1}(\omega_3) &= \{(\neg d, 1)\} \\ F_{\Sigma_1}(\omega_4) &= \emptyset \\ F_{\Sigma_1}(\omega_5) &= \emptyset \\ F_{\Sigma_1}(\omega_6) &= \{(\neg d, 1), (\neg s \vee \neg d, 1), \} \\ F_{\Sigma_1}(\omega_7) &= \{(\neg d, 1), (\neg s \vee \neg d, 1), (\neg s \vee \neg d \vee \neg o, 1)\} \end{aligned}$$

D'après la méthode construction de  $p_{\Psi_i}$  nous avons pour chaque  $\omega$  :

$$p_{\Psi_i}(\omega) = \max(\{p_{\Sigma_i}(\phi), (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i \text{ et } \omega \not\models \phi\}) = \kappa_{\Sigma_i}(\omega)$$

ce qui donne ici :

$$p_{\Psi_1}(\omega) = \max(\{p_{\Sigma_1}(\phi), (\phi, p_{\Sigma_1}(\phi)) \in F_{\Sigma_1}(\omega)\})$$

Appliquée à chaque interprétation cette définition donne :

$$\begin{aligned}
 p_{\Psi_1}(\omega_0) &= p_{\Sigma_1}(s \vee o) &= 1 \\
 p_{\Psi_1}(\omega_1) &= \max(\emptyset) &= 0 \\
 p_{\Psi_1}(\omega_2) &= p_{\Sigma_1}(s \vee \neg d \vee o) &= 2 \\
 p_{\Psi_1}(\omega_3) &= p_{\Sigma_1}(\neg d) &= 1 \\
 p_{\Psi_1}(\omega_4) &= \max(\emptyset) &= 0 \\
 p_{\Psi_1}(\omega_5) &= \max(\emptyset) &= 0 \\
 p_{\Psi_1}(\omega_6) &= p_{\Sigma_1}(\neg s \vee \neg d) &= 1 \\
 p_{\Psi_1}(\omega_7) &= p_{\Sigma_1}(\neg s \vee \neg d \vee \neg o) &= 1
 \end{aligned}$$

Le pré-ordre  $\leq_{\Psi_1}$  est donc :

$$\omega_1 =_{\Psi_1} \omega_4 =_{\Psi_1} \omega_5 <_{\Psi_1} \omega_0 =_{\Psi_1} \omega_3 =_{\Psi_1} \omega_6 =_{\Psi_1} \omega_7 <_{\Psi_1} \omega_2$$

La construction de la base  $K_1$  correspondante est donnée par :

$$\text{Mod}(K_1) = \min(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_1}) = \{\omega_1, \omega_4, \omega_5\}$$

Ce qui permet d'obtenir la base propositionnelle :

$$K_1 = \{(s \vee o) \wedge \neg d\}$$

En appliquant la même méthode de construction à la base de croyances stratifiée  $\Sigma_2$  nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 p_{\Psi_2}(\omega_0) &= p_{\Sigma_2}(d \vee o) &= 1 &= \kappa_{\Sigma_2}(\omega_0) \\
 p_{\Psi_2}(\omega_1) &= \max(\emptyset) &= 0 &= \kappa_{\Sigma_2}(\omega_1) \\
 p_{\Psi_2}(\omega_2) &= \max(\emptyset) &= 0 &= \kappa_{\Sigma_2}(\omega_2) \\
 p_{\Psi_2}(\omega_3) &= p_{\Sigma_2}(\neg d \vee \neg o) &= 1 &= \kappa_{\Sigma_2}(\omega_3) \\
 p_{\Psi_2}(\omega_4) &= p_{\Sigma_2}(\neg s \vee d \vee o) &= 2 &= \kappa_{\Sigma_2}(\omega_4) \\
 p_{\Psi_2}(\omega_5) &= p_{\Sigma_2}(\neg s) &= 1 &= \kappa_{\Sigma_2}(\omega_5) \\
 p_{\Psi_2}(\omega_6) &= p_{\Sigma_2}(\neg s \vee \neg d) &= 1 &= \kappa_{\Sigma_2}(\omega_6) \\
 p_{\Psi_2}(\omega_7) &= p_{\Sigma_2}(\neg s \vee \neg d \vee \neg o) &= 2 &= \kappa_{\Sigma_2}(\omega_7)
 \end{aligned}$$

Le pré-ordre  $\leq_{\Psi_2}$  est donc :

$$\omega_1 =_{\Psi_2} \omega_2 <_{\Psi_2} \omega_0 =_{\Psi_2} \omega_3 =_{\Psi_2} \omega_5 =_{\Psi_2} \omega_6 <_{\Psi_2} \omega_4 =_{\Psi_2} \omega_7$$

La construction de la base  $K_2$  correspondante est donnée par :

$$\text{Mod}(K_2) = \min(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_2}) = \{\omega_1, \omega_2\}$$

Ce qui permet d'obtenir la base propositionnelle :

$$K_2 = \{(\neg s \wedge d \wedge \neg o) \vee (\neg s \wedge \neg d \wedge o)\}$$

Pour finir, la construction à partir de la base de croyances stratifiée  $\Sigma_3$  repose sur la définition de  $p_{\Psi_3}$  telle que :

$$\begin{aligned}
 p_{\Psi_3}(\omega_0) &= p_{\Sigma_3}(s \vee d \vee o) &= 3 &= \kappa_{\Sigma_3}(\omega_0) \\
 p_{\Psi_3}(\omega_1) &= p_{\Sigma_3}(s \vee d) &= 2 &= \kappa_{\Sigma_3}(\omega_1) \\
 p_{\Psi_3}(\omega_2) &= p_{\Sigma_3}(s \vee o) &= 2 &= \kappa_{\Sigma_3}(\omega_2) \\
 p_{\Psi_3}(\omega_3) &= p_{\Sigma_3}(s) &= 1 &= \kappa_{\Sigma_3}(\omega_3) \\
 p_{\Psi_3}(\omega_4) &= p_{\Sigma_3}(d \vee o) &= 2 &= \kappa_{\Sigma_3}(\omega_4) \\
 p_{\Psi_3}(\omega_5) &= p_{\Sigma_3}(d) &= 1 &= \kappa_{\Sigma_3}(\omega_5) \\
 p_{\Psi_3}(\omega_6) &= p_{\Sigma_3}(o) &= 1 &= \kappa_{\Sigma_3}(\omega_6) \\
 p_{\Psi_3}(\omega_7) &= \max(\emptyset) &= 0 &= \kappa_{\Sigma_3}(\omega_7)
 \end{aligned}$$

A partir de l'ensemble  $\mathcal{B}$  des bases de croyances stratifiée nous pouvons construire l'ensemble de bases propositionnelles  $E = \{K_1, K_2, K_3\}$  dans lequel les  $K_i$  sont les bases propositionnelles construites précédemment. Nous définissons la fonction de pondération externe  $q_C$  telle que :

$$\forall K_i \in E, \quad q_C(\xi_i) = q_B(\Sigma_i)$$

Dans notre cas les valeurs de  $q_C$  sont :

$$\begin{aligned} q_C(\xi_1) &= 1 \\ q_C(\xi_2) &= 1 \\ q_C(\xi_3) &= 2 \end{aligned}$$

Le pré-ordre  $\leq_C$  induit par la fonction  $q_C$  obtenu est :

$$\xi_1 =_C \xi_2 <_C \xi_3$$

L'ensemble de bases propositionnelles  $\mathcal{C}$  est équivalent à l'ensemble de bases de croyances stratifiées  $\mathcal{B}$

### 6.5.2 De la représentation sémantique à la représentation syntaxique

La correspondance entre les approches sémantique et syntaxique est basée sur la fonction  $\kappa$ , définie en 70 page 72 utilisée en logique possibiliste [13] et dans le Système Z [69]. Nous proposons une méthode de construction d'une base de croyances stratifiée à partir de la représentation sémantique d'un état épistémique.

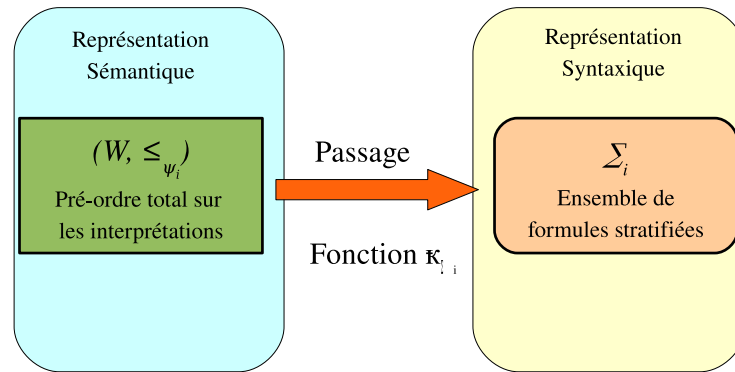


FIG. 6.6 – Passage d'une représentation sémantique d'un état épistémique à une représentation syntaxique.

Comme nous le voyons en figure 6.6 La fonction  $\kappa$  induit la mise en place d'une méthode de construction d'une base stratifiée, notée  $\Sigma_i$  contrepartie syntaxique d'un couple  $\xi_i = (\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$  représentant l'état épistémique  $\Psi_i$ .

### 6.5.3 Construction d'une base de croyances stratifiée

Pour le couple  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$  représentant un état épistémique  $\Psi_i$ , nous construisons une base stratifiée  $\Sigma_i$  pour laquelle nous notons  $\leq_{\Sigma_i}$  le pré-ordre total sur les formules de  $\Sigma_i$ . Cette base doit être telle que pour toute les interprétation  $\omega \in \mathcal{W}$ , la propriété  $\kappa_{\Sigma_i}(\omega) = p_{\Psi_i}(\omega)$  soit respectée. Plus formellement, soit  $\mathcal{C} =$

$\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  un ensemble de couples représentant sémantiquement un ensemble d'états épistémiques et soit  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$  un ensemble de bases de croyances stratifiées. Pour deux bases  $\Sigma_i \in \mathcal{B}$  et  $\xi_i \in \mathcal{C}$  :

$$\Sigma_i \text{ est équivalente à } \xi_i \text{ si et seulement si } \forall \omega \in \mathcal{W}, \kappa_{\Sigma_i}(\omega) = p_{\Psi_i}(\omega)$$

De plus,  $\mathcal{B}$  est équivalent à  $\mathcal{C}$  si et seulement si chaque base de croyances stratifiée  $\Sigma_i \in \mathcal{B}$  est équivalente à un couple  $\xi_i$  et si  $q_{\mathcal{C}}(\xi_i) = q_{\mathcal{B}}(\Sigma_i)$ .

La construction d'une base de croyances stratifiée équivalente à la représentation sémantique d'un état épistémique  $\Psi_i$  nécessite le respect de la fonction  $\kappa$ . Une condition nécessaire pour s'assurer de cette propriété est que les formules falsifiées par une interprétation d'un certain rang dans  $\leq_{\Psi_i}$  ne doivent pas être falsifiées par des interprétations de rang inférieur. D'où la proposition :

**Proposition 15** Soit  $\omega_k \in \mathcal{W}$  et  $\omega_l \in \mathcal{W}$  deux interprétations telles que  $\omega_l \leq_{\Psi_i} \omega_k$ . Soit  $A_l = \{(\phi_l, p_{\Psi_i}(\omega_l))\}$  l'ensemble des formules pondérées falsifiées par  $\omega_l$  et soit  $B_k = \{(\phi_k, p_{\Psi_i}(\omega_k))\}$  l'ensemble des formules pondérées falsifiées par  $\omega_k$ . Soit  $S = \{(\phi_s, p_{\Psi_i}(\omega_k)) \in B_k \text{ tq } \omega_l \not\models \phi_s\}$  l'ensemble des formules de  $B_k$  falsifiées par l'interprétation  $\omega_l$ .

L'ensemble de formules  $\Sigma = A_l \cup B_k \setminus S$  est tel que  $\kappa_{\Sigma}(\omega_l) = \kappa_{A_l}(\omega_l)$  et  $\kappa_{\Sigma}(\omega_k) = \kappa_{B_k}(\omega_k)$

**Preuve 1** La preuve de cette proposition repose sur deux cas.

–  $\omega_l \models B_k$ . Dans ce cas  $S = \emptyset$  et  $\Sigma = A_l \cup B_k$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \kappa_{\Sigma}(\omega_l) &= \max(\{p_{\Sigma}(\phi) \text{ tq } (\phi, p_{\Sigma}(\phi)) \in \Sigma, \omega_l \not\models \phi\}) \\ &= \max(\{p_{\Psi_i}(\omega_l) \text{ tq } (\phi_l, p_{\Psi_i}(\omega_l)) \in A_l\}) \\ &\quad \text{car } \omega_l \text{ falsifie uniquement des formules de } A_l. \\ &= p_{\Psi_i}(\omega_l) = \kappa_{A_l}(\omega_l) \end{aligned}$$

–  $\omega_l \not\models B_k$ . Dans ce cas, l'ensemble  $S$  n'est pas vide. Le calcul de la fonction  $\kappa$  donne :

$$\begin{aligned} \kappa_{\Sigma}(\omega_l) &= \max(\{p_{\Sigma}(\phi) \text{ tq } (\phi, p_{\Sigma}(\phi)) \in \Sigma, \omega_l \not\models \phi\}) \\ &= \max(\{p_{\Psi_i}(\omega_l) \text{ tq } (\phi_l, p_{\Psi_i}(\omega_l)) \in A_l\}) \\ &\quad \text{car } \omega_l \text{ ne falsifie aucune formule de } B_k \setminus S. \\ &= p_{\Psi_i}(\omega_l) = \kappa_{A_l}(\omega_l) \end{aligned}$$

Le cas de l'interprétation  $\omega_k$  est invariant quelque-soit  $\omega_l$ . Le calcul de la fonction  $\kappa$  est tel que :

$$\begin{aligned} \kappa_{\Sigma}(\omega_k) &= \max(\{p_{\Sigma}(\phi) \text{ tq } (\phi, p_{\Sigma}(\phi)) \in \Sigma, \omega_k \not\models \phi\}) \\ &= \max(\{p_{\Psi_i}(\omega_k) \text{ tq } (\phi_k, p_{\Psi_i}(\omega_k)) \in B_k\}) \\ &\quad \text{car les hypothèses de départ sont que } p_{\Psi_i}(\omega_l) \leq p_{\Psi_i}(\omega_k) \text{ et } \omega_k \not\models B_k \\ &= p_{\Psi_i}(\omega_k) = \kappa_{B_k}(\omega_k) \end{aligned}$$

Nous vérifions donc bien  $\kappa_{\Sigma}(\omega_l) = \kappa_{A_l}(\omega_l)$  et  $\kappa_{\Sigma}(\omega_k) = \kappa_{B_k}(\omega_k)$ .  $\square$

Avant de proposer une méthode permettant de construire pour un couple  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$  une base de croyances pondérées équivalente, nous rappelons la notion de sous-sommation.

**Définition 71** Soit  $(\phi, p_{\Sigma_i}(\phi))$ ,  $(\psi, p_{\Sigma_i}(\psi))$  deux formules de  $\Sigma_i$

$$(\psi, p_{\Sigma_i}(\psi)) \text{ est sous-sommée par } (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \text{ si et seulement si } \phi \models \psi \text{ et } p_{\Sigma_i}(\psi) \leq p_{\Sigma_i}(\phi)$$

La sous-sommation classique ne tient pas compte des poids des formules. Dans ce cas :

$$(\psi, p_{\Sigma_i}(\psi)) \text{ est sous-sommée par } (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \text{ si et seulement si } \phi \models \psi$$

La sous-sommation permet d'émettre la proposition bien connue suivante :

**Proposition 16** Soit  $\Sigma_i$  une base de croyances stratifiée équivalente à un couple  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$ . Soit  $\Sigma_i^*$  la base de croyances obtenue en retirant toutes les formules sous-sommées. La base  $\Sigma_i^*$  est équivalente à la base  $\Sigma_i$ , c'est à dire  $\forall \omega \in \mathcal{W}, \kappa_{\Sigma_i^*}(\omega) = \kappa_{\Sigma_i}(\omega)$ .



**Preuve 2** Le retrait des tautologies de  $\Sigma_i$  n'a pas d'incidence sur la fonction  $\kappa$ . En effet elle ne peuvent pas être falsifiées par aucune interprétation.

Soit l'ensemble des formules sous-sommées de  $\Sigma_i$  défini par :

$$S = \{(\phi_s, p_{\Sigma_i}(\phi_s)) \in \Sigma_i, (\phi_s, p_{\Sigma_i}(\phi_s)) \text{ est sous-sommée}\}$$

Nous notons  $\Sigma_i^* = \Sigma_i \setminus S$  la base de croyance stratifiée issue de  $\Sigma_i$  et pour laquelle toutes les formules sous-sommées ont été retirées. Si  $S = \emptyset$ , alors  $\Sigma_i^* = \Sigma_i$  et donc  $\forall \omega \in \mathcal{W}, \kappa_{\Sigma_i^*}(\omega) = \kappa_{\Sigma_i}(\omega)$ .

Si  $S \neq \emptyset$ , pour une formule  $(\phi_s, p_{\Sigma_i}(\phi_s)) \in S$  et pour une interprétation  $\omega$  de  $\mathcal{W}$  deux cas sont possibles :  
 –  $\omega \models \phi_s$ . La fonction  $\kappa$  ne prend en compte que les formules falsifiées par  $\omega$ . La formule sous-sommée  $\phi_s$  n'intervient donc pas dans le calcul de  $\kappa_{\Sigma_i}(\omega)$ . On a donc bien :

$$\begin{aligned} \kappa_{\Sigma_i^*}(\omega) &= \max(\{p_{\Sigma_i}(\phi), (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i \setminus \{(\phi_s, p_{\Sigma_i}(\phi_s))\}, \omega \not\models \phi\}) \\ &= \max(\{p_{\Sigma_i}(\phi), (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i, \omega \not\models \phi\}) \\ &= \kappa_{\Sigma_i}(\omega) \\ &= p_{\Psi_i}(\omega) \end{aligned}$$

–  $\omega \not\models \phi_s$ . Soit  $A_{\phi_s}$  l'ensemble des formules de poids supérieur à  $p_{\Sigma_i}(\phi_s)$ . Nous avons  $\omega \not\models A_{\phi_s}$  car  $A_{\phi_s} \models \phi_s$  en raison de la définition de la sous-sommation. Il existe au moins une formule  $\psi$  de  $A_{\phi_s}$  telle que  $\omega \not\models \psi$  et, par définition de  $A_{\phi_s}$ ,  $p_{\Sigma_i}(\phi_s) \leq_{\Sigma_i} p_{\Sigma_i}(\psi)$ . Soit  $\Sigma_i^* = \Sigma_i \setminus \{(\phi_s, p_{\Sigma_i}(\phi_s))\}$  et soit  $\Sigma_i'' = \Sigma_i^* \cup \{(\psi, p_{\Sigma_i}(\psi))\}$ . La fonction  $\kappa_{\Sigma_i}$  est telle que :

$$\begin{aligned} \kappa_{\Sigma_i}(\omega) &= \max(\{p_{\Sigma_i}(\phi), (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i, \omega \not\models \phi\}) \\ &= \max(\{\kappa_{\Sigma_i''}(\omega), p_{\Sigma_i}(\phi_s), p_{\Sigma_i}(\psi)\}) \\ &= \max(\{\kappa_{\Sigma_i''}(\omega), p_{\Sigma_i}(\psi)\}) \\ &= \kappa_{\Sigma_i^*}(\omega) = p_{\Psi_i}(\omega) \end{aligned}$$

□

Les propositions 15 et 16 permettent de mettre au point une méthode de construction de base de croyances stratifiée équivalente à la représentation sémantique d'un état épistémique. Cette méthode se divise en quatre phases.

**Préliminaires** Le traitement préliminaire consiste à ordonner les interprétations de  $\mathcal{W}$  dans l'ordre croissant suivant  $\leq_{\Psi_i}$ . Le parcours de l'ensemble des interprétations est tel que si  $\mathcal{W}^k$  est l'ensemble des interprétations déjà traitées, la nouvelle interprétation  $\omega'$  en cours de traitement sera telle que  $\forall \omega \in \mathcal{W}^k, \omega \leq_{\Psi_i} \omega'$ . De plus, la base de croyances stratifiée  $\Sigma_i$  est initialisée à l'ensemble vide. L'ensemble des formules falsifiées par les interprétations  $\omega$  de poids minimal sont générées et stockées dans l'ensemble des formules déjà traitées.

**Première étape** Pour chaque interprétation  $\omega$ , la construction génère toutes les disjonctions  $\phi$  falsifiées par  $\omega$ . Ces disjonctions sont réparties en fonction de leur nombre de littéraux dans des ensembles, notés  $\mathcal{D}_i, 1 \leq i \leq n$ , où  $i$  est le nombre de littéraux présents dans chaque disjonction. Pour tous les ensembles  $\mathcal{D}_i$ , chaque disjonction  $\phi$  est associée au poids  $p_{\Sigma_i}(\phi) = p_{\Psi_i}(\omega)$ . L'ensemble des formules falsifiant une interprétation est noté  $B_{k+1}$  ou  $k$  est le cardinal de l'ensemble des interprétations déjà traitées  $\mathcal{W}^k$ .

**Seconde étape** La seconde étape permet d'assurer le respect de l'équivalence entre le couple  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$  et la base de croyances stratifiée en cours de construction. L'équivalence spécifie que

$$\kappa_{\Sigma_i} = \max(\{p_{\Sigma_i}(\phi), (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i \text{ et } \omega \not\models \phi\}) = p_{\Sigma_i}(\omega)$$

Les disjonctions de l'ensemble  $B_{k+1}$  générées pour une interprétation  $\omega'$  ne doivent pas être falsifiées par une interprétation  $\omega$  telle que  $\omega \leq_{\Psi_i} \omega'$  (et donc traitée précédemment). Afin de garantir cette propriété, toutes les formules qui sous-somment (classiquement) des formules générées pour des interprétations précédentes sont

retirées de  $B_{k+1}$ . Une fois les formules de  $S$  retirées de  $B_{k+1}$ , nous pouvons également en retirer les formules sous-sommées car cela n'affecte pas la propriété d'équivalence comme l'indique la proposition 16.

La base de croyances en construction devient alors  $\Sigma_i = \Sigma_i \cup B_{k+1} \setminus S$ . Où  $S$  est l'ensemble des formules de  $B_{k+1}$  falsifiées par des interprétations précédentes. Les étapes 1 et 2 sont répétées jusqu'à ce que toutes les interprétations aient été traitées.

**Troisième étape** La troisième découle de la proposition 16, page 77. Les formules sous-sommées dans la base de croyance stratifiée construite sont retirées. Ceci permet d'optimiser la cardinalité du résultat final.

La construction d'une base de croyances pondérée équivalente à la représentation sémantique d'un état épistémique peut être formalisée par l'algorithme suivant :

---

**Algorithme 1** : Construction de la contrepartie syntaxique d'une base de croyances pondérées.  $|\mathcal{V}|$  désigne le nombre de variables propositionnelles du langage.

---

**Data** :  $\mathcal{W}$  L'ensemble des interprétations trié suivant  $\leq_{\Psi_i}$

**Result** :  $\Sigma_i$  une base de croyances stratifiées

$\Sigma, B_{k+1}, S, M, T, \Sigma^*$  des ensembles de formules pondérées

$\mathcal{W}_m$  un ensemble d'interprétations  $\omega$  une interprétation

$\Sigma_i \leftarrow \emptyset$

$M \leftarrow \emptyset$

$\Sigma^* \leftarrow \emptyset$

$\mathcal{W}_m \leftarrow \{w_k \text{ tq } p_{\Psi_i}(\omega_k) = \min(X, \leq_X)\}$

**while**  $\mathcal{W}_m \neq \emptyset$  **do**

$\omega \leftarrow \omega \in \mathcal{W}$

$B_{k+1} \leftarrow \{(\phi, p_{\Psi_i}(\omega)) \in D_j \text{ tq } 1 \leq j \leq |\mathcal{V}|, \omega \not\models \phi\}$

$S \leftarrow \{(\phi, p_{\Psi_i}(\omega)) \in B_{k+1} \text{ tq } \exists(\phi, p_{\Psi_i}(\omega')) \in M, \text{ avec } p_{\Psi_i}(\omega') \leq p_{\Psi_i}(\omega)\}$

$B_{k+1} \leftarrow B_{k+1} - S$

$M \leftarrow M \cup B_{k+1}$

$\mathcal{W}_m \leftarrow \mathcal{W}_m - \omega$

**end**

$\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{W} - \mathcal{W}_m$

**while**  $\mathcal{W} \neq \emptyset$  **do**

$\omega \leftarrow \omega \in \min(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$

$S \leftarrow \emptyset$

$T \leftarrow \emptyset$

$B_{k+1} \leftarrow \{(\phi, p_{\Psi_i}(\omega)) \in D_j \text{ tq } 1 \leq j \leq |\mathcal{V}|, \omega \not\models \phi\}$

$S \leftarrow \{(\phi, p_{\Psi_i}(\omega)) \in B_{k+1} \text{ tq } \exists(\phi, p_{\Psi_i}(\omega')) \in M, \text{ avec } p_{\Psi_i}(\omega') \leq p_{\Psi_i}(\omega)\}$

$B_{k+1} \leftarrow B_{k+1} - S$

$M \leftarrow M \cup B_{k+1}$

$T \leftarrow \{(\phi_T, p_{\Psi_i}(\omega)) \in B_{k+1} \text{ tq } \exists(\phi', p_{\Psi_i}(\omega)) \in B_{k+1}, \phi' \models \phi_T\}$

$B_{k+1} \leftarrow B_{k+1} - T$

$\Sigma_i \leftarrow \Sigma_i \cup B_{k+1}$

$\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{W} - \omega$

**end**

$\Sigma^* \leftarrow \text{retireSousSommees}(\Sigma)$

**return**  $\Sigma^*$

---

Nous ne détaillons pas la fonction retirant les formules sous-sommées de la base  $\Sigma$  construite car de nombreuses méthodes performantes ont été proposées dans la littérature. Dans la suite de ce travail, nous noterons  $\Sigma$  au lieu de  $\Sigma^*$  la base de croyance stratifiée retournée par l'algorithme 1. Cette simplification clarifie les notations est justifiée par l'équivalence entre les deux bases. Nous démontrons maintenant que la base de croyances stratifiée construite à partir de la représentation sémantique d'un état épistémique lui est bien équivalente.

**Proposition 17** Soit  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$  un couple représentant un état épistémique  $\Psi_i$ . La base de croyances stratifiée  $\Sigma_i$  construite suivant la méthode précédente est telle que :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, \kappa_{\Sigma_i}(\omega) = p_{\Psi_i}(\omega)$$

**Preuve 3** Soit  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$  un couple représentant un état épistémique  $\Psi_i$  et  $\leq_{\Psi_i}$ . On note  $\mathcal{W}^k$  l'ensemble des  $k$  premières interprétations  $\omega_i$  dans le pré-ordre  $\leq_{\Psi_i}$ . Soit formellement :

$$\forall \omega_i, \omega_j \in \mathcal{W}, \omega_i \leq_{\Psi_i} \omega_j$$

Soit la base de croyances stratifiée  $\Sigma_i^k$  construite à partir des interprétations de  $\mathcal{W}^k$  et définie telle que :

$$\Sigma_i^k = \{(\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)), \forall \omega \in \mathcal{W}^k, \kappa_{\Sigma_i^k}(\omega) = p_{\Psi_i}(\omega)\}$$

Soit  $\omega'$  une interprétation telle que :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}^k, \omega_k \leq_{\Psi_i} \omega'$$

Nous démontrons que nous pouvons construire :

$$\Sigma_i^{k+1} = \{(\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)), \forall \omega \in \mathcal{W}^{k+1}, \kappa_{\Sigma_i^{k+1}}(\omega) = p_{\Psi_i}(\omega)\}$$

**Pour  $k = 1$**  Nous avons  $\mathcal{W}^1 = \{\omega\}$ ,  $\omega \in \{\min(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})\}$  et nous construisons une base de croyances stratifiée telle que :

$$\Sigma_i^1 = \{(\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)), p_{\Sigma_i}(\phi) = p_{\Psi_i}(\omega_0), \omega_0 \not\models \phi\}$$

La fonction  $\kappa_{\Sigma_i^1}$  est telle que :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}^1, \kappa_{\Sigma_i^1} = \max(\{p_{\Sigma_i}(\phi), (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i^1\}) = p_{\Psi_i}(\omega)$$

**Pour  $k$**  Nous supposons la propriété :

$$\Sigma_i^k = \{(\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)), \forall \omega \in \mathcal{W}^k, \kappa_{\Sigma_i^k}(\omega) = p_{\Psi_i}(\omega)\}$$

vérifiée.

**Pour  $k+1$**  Nous voulons démontrer que :

$$\Sigma_i^{k+1} = \{(\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)), \forall \omega \in \mathcal{W}^{k+1}, \kappa_{\Sigma_i^{k+1}}(\omega) = p_{\Psi_i}(\omega)\}$$

avec

$$\mathcal{W}^{k+1} = \mathcal{W}^k \cup \{\omega'\}, \forall \omega \in \mathcal{W}^k, \omega_k \leq_{\Psi_i} \omega'$$

Nous nous basons pour cela la proposition 15 énoncée page 77. Soit  $B_{k+1}$  la base de croyances stratifiée définie par :

$$B_{k+1} = \{(\psi, p_{\Sigma_i}(\psi)) \text{ avec } p_{\Sigma_i}(\psi) = p_{\Psi_i}(\omega')\}$$

Notons :

$$S = \{(\psi', p_{\Sigma_i}(\psi')) \in B_{k+1}, \exists \omega \in \mathcal{W}^k, \omega \not\models \psi'\}$$

L'ensemble des formules de  $B_{k+1}$  falsifiées par une interprétation de  $\mathcal{W}^k$ . Nous construisons  $\Sigma_i^{k+1}$  comme étant l'union de  $\Sigma_i^k$  et de  $B_{k+1}$  privée des formules de  $S$ . Soit formellement :

$$\Sigma_i^{k+1} = \Sigma_i^k \cup (B_{k+1} \setminus S)$$

Deux cas sont possibles. Soit aucune interprétation de  $\mathcal{W}^k$  ne falsifie aucune formule de  $B_{k+1}$ , soit une ou plusieurs interprétations de  $\mathcal{W}^k$  falsifient au moins une formule de  $B_{k+1}$ .

i)  $\forall \omega \in \mathcal{W}^k, \forall (\psi, p_{\Sigma_i}(\psi)) \in B_{k+1}, \omega \models \psi$

Dans ce cas :

$$S = \{(\psi', p_{\Sigma_i}(\psi')) \in B_{k+1}, \exists \omega \in \mathcal{W}^k, \omega \not\models \psi'\} = \emptyset$$

Nous avons donc  $\Sigma_i^{k+1} = \Sigma_i^k \cup B_{k+1}$  et la fonction  $\kappa_{\Sigma_i^{k+1}}$  telle que :

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \mathcal{W}^k, \kappa_{\Sigma_i^{k+1}}(\omega) &= \max(\{p_{\Sigma_i}(\phi), (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i^{k+1}, \omega \not\models \phi\}) \\ &= \max(\{p_{\Sigma_i}(\phi), (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i^k, \omega \not\models \phi\}) \\ &= \kappa_{\Sigma_i^k}(\omega) \\ &= p_{\Psi_i}(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{\Sigma_i^{k+1}}(\omega') &= \max(\{p_{\Sigma_i}(\phi), (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i^{k+1}, \omega' \not\models \phi\}) \\ &= p_{\Psi_i}(\omega') \end{aligned}$$

En effet, les formules  $(\psi, p_{\Sigma_i}(\psi))$  composant l'ensemble  $B_{k+1}$  sont nécessairement falsifiées par  $\omega'$  et leurs poids sont tels que  $p_{\Sigma_i}(\psi) = p_{\Psi_i}(\omega')$ . Cependant, d'après la définition du pré-ordre  $\leq_{\Psi}$ ,  $\forall \omega \in \mathcal{W}^k, p_{\Psi_i}(\omega) \leq p_{\Psi_i}(\omega')$ . Nous avons donc bien :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}^{k+1}, \kappa_{\Sigma_i^{k+1}}(\omega) = p_{\Psi_i}(\omega)$$

ii)  $\exists \omega \in \mathcal{W}^k, \exists (\psi, p_{\Sigma_i}(\psi)) \in B_{k+1}, \omega \not\models \psi$

Des formules de  $B_{k+1}$  sont falsifiées par au moins une interprétation de  $\mathcal{W}^k$ . L'ensemble  $S$  est donc tel que :

$$S = \{(\psi', p_{\Sigma_i}(\psi')) \in B_{k+1}, \exists \omega \in \mathcal{W}^k, \omega \not\models \psi'\} \neq \emptyset$$

Avec  $\Sigma_i^{k+1} = \Sigma_i^k \cup (B_{k+1} \setminus S)$  nous retrouvons la fonction  $\kappa_{\Sigma_i^{k+1}}$  telle que :

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \mathcal{W}^k, \kappa_{\Sigma_i^{k+1}}(\omega) &= \max(\{p_{\Sigma_i}(\phi), (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i^{k+1}, \omega \not\models \phi\}) \\ &= \max(\{p_{\Sigma_i}(\phi), (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i^k, \omega \not\models \phi\}) \\ &= \kappa_{\Sigma_i^k}(\omega) \\ &= p_{\Psi_i}(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{\Sigma_i^{k+1}}(\omega') &= \max(\{p_{\Sigma_i}(\phi), (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i^{k+1}, \omega' \not\models \phi\}) \\ &= p_{\Psi_i}(\omega') \end{aligned}$$

Nous vérifions bien la fonction  $\kappa_{\Sigma_i^{k+1}}$ , en effet :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}^{k+1}, \kappa_{\Sigma_i^{k+1}}(\omega) = p_{\Psi_i}(\omega)$$

La proposition est donc démontrée pour  $n = k + 1$   $\square$

Après la création de toutes les bases de croyances stratifiées  $\Sigma_i$  représentant les contre parties syntaxiques des couples  $\xi_i$ , nous achevons la construction de l'ensemble de bases stratifiées en le munissant d'un pré-ordre  $\leq_{\mathcal{B}}$  identique au pré-ordre  $\leq_{\mathcal{C}}$ . Pour cela, nous définissons la fonctions de pondération externe  $q_{\mathcal{C}}(\xi_i) = q_{\mathcal{B}}(\Sigma_i)$ .

Nous pouvons alors formaliser la définition de l'équivalence entre un ensemble de couples  $\mathcal{C} = \{(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_1}), \dots, (\mathcal{W}, \leq_{\Psi_n})\}$  et un ensemble de bases de croyances stratifiées  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$  représentant sémantiquement et syntaxiquement un ensemble d'états épistémiques  $\Psi = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}$ .

**Définition 72** Soit  $\Psi = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}$  un ensemble d'états épistémiques. Soit  $\mathcal{C} = \{(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_1}), \dots, (\mathcal{W}, \leq_{\Psi_n})\}$  la représentation sémantique de  $\Psi$  et soit  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$  la représentation syntaxique de  $\Psi$ . Les ensembles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{B}$  sont équivalents si et seulement si :

$$\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n, \forall \omega \in \mathcal{W}, \kappa_{\Sigma_i}(\omega) = p_{\Psi_i}(\omega)$$

et

$$\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n, q_{\mathcal{C}}(\xi_i) = q_{\mathcal{B}}(\Sigma_i)$$

L'exemple suivant illustre le processus de construction d'un ensemble de bases de croyances stratifiées équivalent à un ensemble de couples représentant sémantiquement un ensemble d'états épistémiques.

**Exemple 13** Soit  $E = \{K_1, K_2, K_3\}$  l'ensemble de bases propositionnelles représentant les croyances observables d'un ensemble d'état épistémiques. L'ensemble  $E$  est défini par :

$$\begin{aligned} K_1 &= \{(s \vee o) \wedge \neg d\} \\ K_2 &= \{(\neg s \wedge d \wedge \neg o) \vee (\neg s \wedge \neg d \wedge o)\} \\ K_3 &= \{s \wedge o \wedge d\} \end{aligned}$$

Les représentations sémantiques des états épistémiques  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  et  $\Psi_3$  reposent respectivement sur les fonctions de pondérations  $p_{\Psi_1}$ ,  $p_{\Psi_2}$  et  $p_{\Psi_3}$  définies par :

$\omega$	$p_{\Psi_1}(\omega)$	$p_{\Psi_2}(\omega)$	$p_{\Psi_3}(\omega)$
$\omega_0$	1	1	3
$\omega_1$	0	0	2
$\omega_2$	2	0	2
$\omega_3$	1	1	1
$\omega_4$	0	2	2
$\omega_5$	0	1	1
$\omega_6$	1	1	1
$\omega_7$	1	2	0

Les pré-ordres sur les interprétations  $\leq_{\Psi_1}$ ,  $\leq_{\Psi_2}$  et  $\leq_{\Psi_3}$  sont respectivement :

$$\begin{aligned} \omega_1 =_{\Psi_1} \omega_4 =_{\Psi_1} \omega_5 <_{\Psi_1} \omega_0 =_{\Psi_1} \omega_3 =_{\Psi_1} \omega_6 =_{\Psi_1} \omega_7 <_{\Psi_1} \omega_2 \\ \omega_1 =_{\Psi_2} \omega_2 <_{\Psi_2} \omega_0 =_{\Psi_2} \omega_3 =_{\Psi_2} \omega_5 =_{\Psi_2} \omega_6 <_{\Psi_2} \omega_4 =_{\Psi_2} \omega_7 \\ \omega_7 <_{\Psi_3} \omega_3 =_{\Psi_3} \omega_5 =_{\Psi_3} \omega_6 <_{\Psi_3} \omega_1 =_{\Psi_3} \omega_2 =_{\Psi_3} \omega_4 <_{\Psi_3} \omega_0 \end{aligned}$$

Nous détaillons l'exécution de l'algorithme 1 de construction utilisé pour le calcul de la base de croyances stratifiée  $\Sigma_1$  équivalente au couple  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_1})$ . L'étape préliminaire à la construction est de construire une liste des interprétations triées par ordre croissant suivant le pré-ordre  $\leq_{\Psi_1}$ . Dans notre exemple, cet ordre est

$$\omega_1 =_{\Psi_1} \omega_4 =_{\Psi_1} \omega_5 \leq_{\Psi_1} \omega_0 =_{\Psi_1} \omega_3 =_{\Psi_1} \omega_6 =_{\Psi_1} \omega_7 \leq_{\Psi_1} \omega_2$$

Pour chaque interprétation  $\omega_i$  de la liste, l'algorithme génère tous les littéraux falsifiés par  $\omega_i$  puis les disjonctions de deux littéraux falsifiées et ainsi de suite. Afin de générer la base  $\Sigma_i$ , l'algorithme utilise 8 itérations que nous détaillons maintenant.

**Préliminaires** Pour chaque interprétation minimale dans le pré-ordre  $\leq_{\Psi_i}$ , l'ensemble des disjonctions falsifiées par celle-ci est généré. L'ensemble des formules traitées  $M$  reçoit alors l'ensemble des formules qui ne sont qu'il ne contient pas déjà.

Dans cet exemple, l'ensemble des interprétations minimales pour le pré-ordre  $\Psi_1$  est l'ensemble  $\mathcal{W}_m = \{\omega_1, \omega_4, \omega_5\}$ . Nous avons donc après traitement des trois interprétations l'ensemble  $\Sigma_1 = \emptyset$  et l'ensemble  $M$  tel que :

$$\begin{aligned} M = \{ & (s, 0), (d, 0), (o, 0), (\neg s, 0), (\neg o, 0), \\ & (s \vee d, 0), (\neg s \vee d, 0), (d \vee \neg o, 0), \\ & (d \vee o, 0), (s \vee \neg o, 0), (\neg s \vee o, 0), \\ & (\neg s \vee \neg o), (s \vee d \vee \neg o, 0), \\ & (\neg s \vee d \vee o, 0), (\neg s \vee d \vee \neg o, 0) \} \end{aligned}$$

**Itération** L'itération se fait sur l'ensemble des interprétations  $\{\omega_0, \omega_3, \omega_6, \omega_7, \omega_2\}$ . Chaque itération repose sur trois actions.

- générer les disjonctions falsifiées ;
- retirer des disjonctions générées celles apparaissant dans  $M$  avec un poids inférieur ;
- retirer dans les disjonctions générées les sous-sommées.

**Itération 1** L'interprétation  $\omega_0$  est la première interprétation non modèle de  $K_1$ . Le poids des formules générées n'est donc pas nul. Nous avons :

$$B_1 = \{(s, 1), (d, 1), (o, 1), (s \vee d, 1), (d \vee o, 1), (s \vee o, 1), (s \vee d \vee o, 1)\}$$

$$S = \{(s, 1), (d, 1), (o, 1), (s \vee d, 1), (d \vee o, 1)\}$$

$$M = M \cup (B_1 - S)$$

$$T = \{(s \vee d \vee o, 1)\}$$

$$\Sigma_1 = \Sigma_1 \cup \{(s \vee o, 1)\}$$

Seules deux formules ne sont pas falsifiées par des interprétations précédemment traitées. De plus, la formule  $(s \vee d \vee o, 1)$  restante est sous-sommée par la formule  $(s \vee o, 1)$ . Elle est donc retirée du résultat final.

**Itération 2** Pour l'interprétation  $\omega_3$  :

$$B_2 = \{(s, 1), (\neg d, 1), (\neg o, 1), (s \vee \neg d, 1), (\neg d \vee \neg o, 1), (s \vee \neg o, 1), (s \vee \neg d \vee \neg o, 1)\}$$

$$S = \{(s, 1), (\neg o, 1), (s \vee \neg o, 1)\}$$

$$M = M \cup (B_2 - S)$$

$$T = \{(s \vee \neg d, 1), (\neg d \vee \neg o, 1), (s \vee \neg d \vee \neg o, 1)\}$$

$$\Sigma_1 = \Sigma_1 \cup \{(\neg d, 1)\}$$

La formule  $(\neg d, 1)$  n'est pas encore apparue dans  $M$  et sous-somme toutes les autres formules générées pour  $\omega_3$ . C'est donc la seule formule conservée.

**Itération 3** Pour l'interprétation  $\omega_6$  :

$$B_3 = \{(\neg s, 1), (\neg d, 1), (o, 1), (\neg s \vee \neg d, 1), (\neg d \vee o, 1), (\neg s \vee o, 1), (\neg s \vee \neg d \vee o, 1)\}$$

$$S = \{(\neg s, 1), (\neg d, 1), (o, 1), (\neg s \vee o, 1)\}$$

$$M = M \cup (B_3 - S)$$

$$T = \{(\neg s \vee \neg d \vee o, 1)\}$$

$$\Sigma_1 = \Sigma_1 \cup \{(\neg s \vee \neg d, 1), (\neg d \vee o, 1)\}$$

Après retrait des formules précédentes générées il reste deux formules sous-sommant  $(\neg s \vee \neg d \vee o, 1)$  mais aucune des deux n'est sous-sommée par l'autre. Les deux sont donc conservées.

**Itération 4** Pour l'interprétation  $\omega_7$  :

$$B_4 = \{(\neg s, 1), (\neg d, 1), (\neg o, 1), (\neg s \vee \neg d, 1), (\neg d \vee \neg o, 1), (\neg s \vee \neg o, 1), (\neg s \vee \neg d \vee \neg o, 1)\}$$

$$S = \{(\neg s, 1), (\neg d, 1), (\neg o, 1), (\neg s \vee \neg d, 1), (\neg d \vee \neg o, 1), (\neg s \vee \neg o, 1), (\neg d \vee o, 1), (\neg s \vee o, 1)\}$$

$$M = M \cup (B_4 - S)$$

$$T = \emptyset$$

$$\Sigma_1 = \Sigma_1 \cup \{(\neg s \vee \neg d \vee \neg o, 1)\}$$

Toutes les formules générées excepté la disjonction contenant la plus grand nombre de littéraux sont falsifiées par des interprétations de rang inférieur ou égal. L'ensemble des formules générées sous-sommées est donc vide.

**Itération 5** Pour l'interprétation  $\omega_2$  :

$$B_5 = \{(s, 2), (\neg d, 2), (o, 2), (s \vee \neg d, 2), (\neg d \vee o, 2), (s \vee o, 2), (s \vee \neg d \vee o, 2)\}$$

$$S = \{(s, 2), (\neg d, 2), (o, 2), (s \vee \neg d, 2), (\neg d \vee o, 2), (s \vee o, 2)\}$$

$$M = M \cup (B_5 - S)$$

$$T = \emptyset$$

$$\Sigma_1 = \Sigma_1 \cup \{(s \vee \neg d \vee o, 2)\}$$

La dernière interprétation traitée est l'interprétation de rang maximal dans le pré-ordre  $\leq_{\Psi_1}$ . Après les itérations, la base  $\Sigma_1$  obtenue est :

$$\Sigma_1 = \{(\neg d, 1), (s \vee o, 1), (\neg s \vee \neg d, 1), (\neg d \vee o, 1), (\neg s \vee \neg d \vee \neg o, 1), (s \vee \neg d \vee o, 2)\}$$

Le dernier traitement appliqué à  $\Sigma_1$  est le retrait de toutes les formules sous-sommées. C'est à dire ici les formules  $(\neg s \vee \neg d, 1)$ ,  $(\neg d \vee o, 1)$  et  $(\neg s \vee \neg d \vee \neg o, 1)$  toutes trois sous-sommées par  $(\neg d, 1)$ . La base  $\Sigma_1$  devient alors :

$$\Sigma_1 = \{(\neg d, 1), (s \vee o, 1), (s \vee \neg d \vee o, 2)\}$$

Afin de vérifier que la base  $\Sigma_1$  est bien équivalente au couple  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_1})$  nous calculons les valeurs de la fonction  $\kappa$  pour toutes les interprétations.

$$\begin{array}{llll} \kappa_{\Sigma_1}(\omega_0) & = & p_{\Sigma_1}(s \vee o) & = 1 = p_{\Psi_1}(\omega_0) \\ \kappa_{\Sigma_1}(\omega_1) & = & \max(\emptyset) & = 0 = p_{\Psi_1}(\omega_1) \\ \kappa_{\Sigma_1}(\omega_2) & = & \max(\{p_{\Sigma_1}(\neg d), p_{\Sigma_1}(s \vee \neg d \vee o)\}) & = 2 = p_{\Psi_1}(\omega_2) \\ \kappa_{\Sigma_1}(\omega_3) & = & \max(\{p_{\Sigma_1}(\neg d)\}) & = 1 = p_{\Psi_1}(\omega_3) \\ \kappa_{\Sigma_1}(\omega_4) & = & \max(\emptyset) & = 0 = p_{\Psi_1}(\omega_4) \\ \kappa_{\Sigma_1}(\omega_5) & = & \max(\emptyset) & = 0 = p_{\Psi_1}(\omega_5) \\ \kappa_{\Sigma_1}(\omega_6) & = & \max(\{p_{\Sigma_1}(\neg d)\}) & = 1 = p_{\Psi_1}(\omega_6) \\ \kappa_{\Sigma_1}(\omega_7) & = & \max(\{p_{\Sigma_1}(\neg d)\}) & = 1 = p_{\Psi_1}(\omega_7) \end{array}$$

L'utilisation de l'algorithme à partir des couple  $\xi_2$  et  $\xi_3$  donne les bases de croyances stratifiées :  $\Sigma_2 = \{(\neg s, 1), (d \vee o, 1), (\neg d \vee \neg o, 1), (\neg s \vee \neg d, 1), (\neg s \vee d \vee o, 2), (\neg s \vee \neg d \vee \neg o, 2)\}$  et  $\Sigma_3 = \{(s, 1), (d, 1)(o, 1), (s \vee d, 2), (d \vee o, 2), (s \vee o, 2), (s \vee d \vee o, 3)\}$ . Les tableaux suivant illustre la construction des bases stratifiées. Les formules soulignées sont les formules apparaissant dans le résultat final. Si nous munissons l'ensemble  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$  d'une fonction de pondération  $q_{\mathcal{B}}(\Sigma_i)$  telle que  $\forall \Sigma_i \in \mathcal{B}, q_{\mathcal{B}}(\Sigma_i) = q_{\mathcal{C}}(\xi_i)$ ,  $\Sigma_i$  équivalent à  $\xi_i$  alors selon la définition 72 l'ensemble  $\mathcal{B}$  est équivalent à l'ensemble  $\mathcal{C}$ .

$\omega$		$p_{\Psi_1}(\omega)$	$D_1$	$D_2$	$D_3$
$\omega_1$	$\neg s, \neg d, o$	0	$s, d, \neg o$	$s \vee d, d \vee \neg o, s \vee \neg o$	$s \vee d \vee \neg o$
$\omega_4$	$s, \neg d, \neg o$	0	$\neg s, d, o$	$\neg s \vee d, d \vee o, \neg s \vee o$	$\neg s \vee d \vee o$
$\omega_5$	$s, \neg d, o$	0	$\neg s, d, \neg o$	$\neg s \vee d, d \vee \neg o, \neg s \vee \neg o$	$\neg s \vee d \vee \neg o$
$\omega_0$	$\neg s, \neg d, \neg o$	1	$s, d, o$	$s \vee d, d \vee o, \underline{s \vee o}$	$s \vee d \vee o$
$\omega_3$	$\neg s, d, o$	1	$s, \underline{\neg d}, \neg o$	$s \vee \neg d, \neg d \vee \neg o, s \vee \neg o$	$s \vee \neg d \vee \neg o$
$\omega_6$	$s, d, \neg o$	1	$\neg s, \neg d, o$	$\underline{\neg s \vee \neg d}, \underline{\neg d \vee o}, \neg s \vee o$	$\neg s \vee \neg d \vee o$
$\omega_7$	$s, d, o$	1	$\neg s, \neg d, \neg o$	$\neg s \vee \neg d, \neg d \vee \neg o, \neg s \vee \neg o$	$\underline{\neg s \vee \neg d \vee \neg o}$
$\omega_2$	$\neg s, d, \neg o$	2	$s, \neg d, o$	$s \vee \neg d, \neg d \vee o, s \vee o$	$\underline{s \vee \neg d \vee o}$

 TAB. 6.1 – Tableau représentant le déroulement de l'algorithme de contrepartie syntaxique pour le couple  $\xi_1$ .

$\omega$		$p_{\Psi_2}(\omega)$	$D_1$	$D_2$	$D_3$
$\omega_1$	$\neg s \neg d o$	0	$s d \neg o$	$s \vee d d \vee \neg o s \vee \neg o$	$s \vee d \vee \neg o$
$\omega_2$	$\neg s d \neg o$	0	$s \neg d o$	$s \vee \neg d \neg d \vee o s \vee o$	$s \vee \neg d \vee o$
$\omega_0$	$\neg s \neg d \neg o$	1	$s d o$	$s \vee d \underline{d \vee o} s \vee o$	$s \vee d \vee o$
$\omega_3$	$\neg s d o$	1	$s \neg d \neg o$	$s \vee \neg d \underline{\neg d \vee \neg o} s \vee \neg o$	$s \vee \neg d \vee \neg o$
$\omega_5$	$s \neg d o$	1	$\underline{\neg s} d \neg o$	$\neg s \vee d d \vee \neg o \neg s \vee \neg o$	$\neg s \vee d \vee \neg o$
$\omega_6$	$s d \neg o$	1	$\neg s \neg d o$	$\underline{\neg s \vee \neg d} \neg d \vee o \underline{\neg s \vee o}$	$\neg s \vee \neg d \vee o$
$\omega_4$	$s \neg d \neg o$	2	$\neg s d o$	$\neg s \vee d d \vee o \neg s \vee o$	$\underline{\neg s \vee d \vee o}$
$\omega_7$	$s d o$	2	$\neg s \neg d \neg o$	$\neg s \vee \neg d \neg d \vee \neg o \neg s \vee \neg o$	$\underline{\neg s \vee \neg d \vee \neg o}$

 TAB. 6.2 – Tableau représentant le déroulement de l'algorithme de contrepartie syntaxique pour le couple  $\xi_2$ .

$\omega$		$p_{\Psi_3}(\omega)$	$D_1$	$D_2$	$D_3$
$\omega_7$	$s d o$	0	$\neg s \neg d \neg o$	$\neg s \vee \neg d \neg d \vee \neg o \neg s \vee \neg o$	$\neg s \vee \neg d \vee \neg o$
$\omega_3$	$\neg s d o$	1	$\underline{s} \neg d \neg o$	$s \vee \neg d \neg d \vee \neg o s \vee \neg o$	$s \vee \neg d \vee \neg o$
$\omega_5$	$s \neg d o$	1	$\neg s \underline{d} \neg o$	$\neg s \vee d d \vee \neg o s \vee \neg o$	$\neg s \vee d \vee \neg o$
$\omega_6$	$s d \neg o$	1	$\neg s \neg d \underline{o}$	$\neg s \vee \neg d \neg d \vee o \neg s \vee o$	$\neg s \vee \neg d \vee o$
$\omega_1$	$\neg s \neg d o$	2	$s d \neg o$	$\underline{s \vee d} d \vee \neg o s \vee \neg o$	$s \vee d \vee \neg o$
$\omega_2$	$\neg s d \neg o$	2	$s \neg d o$	$s \vee \neg d \neg d \vee o \underline{s \vee o}$	$s \vee \neg d \vee o$
$\omega_4$	$s \neg d \neg o$	2	$\neg s d o$	$\neg s \vee d \underline{d \vee o} \neg s \vee o$	$\neg s \vee d \vee o$
$\omega_0$	$\neg s \neg d \neg o$	3	$s d o$	$s \vee d d \vee o s \vee o$	$\underline{s \vee d \vee o}$

 TAB. 6.3 – Tableau représentant le déroulement de l'algorithme de contrepartie syntaxique pour le couple  $\xi_3$ .





## Chapitre 7

# Fusion d'états épistémiques

### Contents

---

<b>7.1</b>	<b>Approche sémantique</b>	<b>88</b>
7.1.1	Pré-ordres externes et internes.	88
7.1.2	Calcul du poids global	91
7.1.3	Fusion dans le cadre réversible	94
7.1.4	Réversibilité du processus de fusion	96
<b>7.2</b>	<b>Approche Syntaxique</b>	<b>98</b>
7.2.1	Pré-ordres externes et internes	98
7.2.2	Calcul de la base pondérée globale	100
7.2.3	Fusion syntaxique et cadre réversible	105
7.2.4	Réversibilité du processus de fusion	106
<b>7.3</b>	<b>Équivalence des approches</b>	<b>108</b>

---

## 7.1 Approche sémantique

Soit  $\mathcal{C} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  un ensemble de  $n$  couples représentant un ensemble d'états épistémiques  $\Psi = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}$  comme défini en section 6.3, page 64. Chaque couple  $\xi_i$  représentant l'état épistémique  $\Psi_i$  est obtenu par l'intermédiaire d'un agent servant d'interface avec une source d'information  $S_i$ . Fusionner les états épistémiques  $\Psi_i$  peut être fait dans l'approche sémantique par la fusion des couples  $\xi_i$ , comme le montre la figure 7.1.

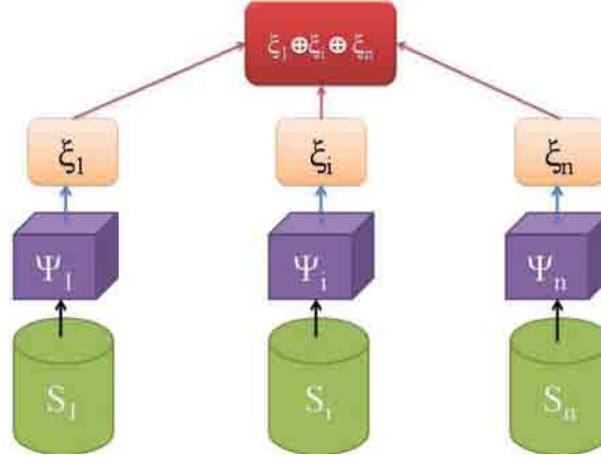


FIG. 7.1 – Schéma de la fusion d'états épistémiques dans l'approche sémantique.

Afin de répondre aux deux problématiques principales (expressivité des techniques de fusion existante et réversibilité de la fusion), nous représentons les priorités internes et externes entre les états épistémiques par des pré-ordres sur les polynômes, comme défini au chapitre 5, page 51. Nous utilisons dans cette section l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  comme ensemble des valeurs de coefficients des polynômes

### 7.1.1 Pré-ordres externes et internes.

Les priorités externes et internes correspondent respectivement à un pré-ordre total externe et à des pré-ordres totaux internes représentés par des polynômes. Afin de respecter les nombreux travaux existants sur la fusion et la révision, les éléments prioritaires seront les éléments minimaux dans les pré-ordres étudiés.

#### Pré-ordre externe représenté par des polynômes

Nous utilisons la définition d'un pré-ordre externe donnée dans la définition 63, page 69. Nous utilisons comme fonction de pondération externe la fonction suivante :

**Définition 73** Soit  $\mathcal{C} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  un ensemble de couples représentant des états épistémiques. La fonction de pondération externe est telle que :

$$\begin{aligned} q : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ \xi_i &\longrightarrow qc(\xi_i) \end{aligned}$$

Le pré-ordre externe est, d'après la définition 63, tel que :

$$\forall \xi_i, \xi_j \in \mathcal{C}, \xi_i \leq_c \xi_j \quad \text{ssi} \quad qc(\xi_i) \leq qc(\xi_j)$$

Nous utilisons l'ensemble des entiers naturels non nuls  $\mathbb{N}^*$  comme ensemble des coefficients pour les pré-ordres internes car celui-ci permet d'utiliser toutes les stratégies de fusion que nous souhaitons représenter. Le choix des ensembles de coefficients doit toujours être adapté aux stratégies de fusion que l'on projette d'utiliser. Si par exemple nous prenons comme ensemble les entiers naturels incluant le 0, le pré-ordre suivant la somme pondérée  $\leq_{WS}$  peut être faussé par des poids externes égaux à 0.

La mise en place d'un pré-ordre externe dépend de deux cas. Soit les états épistémiques sont ordonnées explicitement et les poids  $q_C(\xi_i)$  sont codés par des polynômes constants. Soit les états épistémiques ne sont pas ordonnés et sont donc tous prioritaires. Nous avons alors  $q$  telle que  $\forall \xi_i \in \mathcal{C}, q_C(\xi_i) = 1$ .

**Exemple 14** Reprenons l'exemple 8 de la page 66 dans lequel un professeur demande à ses élèves de choisir entre plusieurs langages de programmation à apprendre. L'ensemble des croyances observables correspondant à l'ensemble d'états épistémiques issus des priorités émises par les élèves est  $E = \{K_1, K_2, K_3\}$ , avec  $K_1 = \{(s \vee o) \wedge \neg d\}$ ,  $K_2 = \{(\neg s \wedge d \wedge \neg o) \vee (\neg s \wedge \neg d \wedge o)\}$  et  $K_3 = \{s \wedge o \wedge d\}$ .

L'ensemble des états épistémiques peut être ordonné explicitement. En effet, le professeur peut considérer un groupe plus prioritaire qu'un autre. Supposons que le groupe 3 soit plus prioritaire que les groupes 1 et 2. Cela se traduit par l'ordre sur les états épistémiques :

$$\Psi_3 \leq_{\Psi} \Psi_1 =_{\Psi} \Psi_2$$

Les couples représentant les états épistémiques sont soumis aux mêmes priorités, et nous avons donc :

$$\xi_3 \leq_C \xi_1 =_C \xi_2$$

Les poids externes attachés aux couples  $\xi_i$  représentant les  $\Psi_i$  sont donc :

$$q_C(\xi_1) = 2$$

$$q_C(\xi_2) = 2$$

$$q_C(\xi_3) = 1$$

### Pré-ordre interne représenté par des polynômes

Nous utilisons la représentation du pré-ordre interne d'un état épistémique  $\Psi_i$  par des polynômes suivant la définition 61, page 65. Nous rappelons la définition d'une fonction de pondération interne :

**Rappel 6** Soit  $\Psi = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}$  un ensemble d'états épistémiques,  $\mathcal{W}$  l'ensemble des interprétations du langage et  $X$  un ensemble muni d'un pré-ordre total noté  $\leq_X$  et possédant un élément minimal pour  $\leq_X$ . Une fonction de pondération interne est telle que :

$$\begin{aligned} p_{\Psi_i} : \mathcal{W} &\longrightarrow X \\ \omega &\longrightarrow p_{\Psi_i}(\omega) \end{aligned}$$

De même que la définition d'un pré-ordre basé sur des polynômes.

**Rappel 7** Un pré-ordre interne représentant les priorités au sein d'un état épistémique est défini par :

$$\forall \omega_j, \omega_k \in \mathcal{W}, \omega_j \leq_{\Psi_i} \omega_k \text{ si et seulement si } p_{\Psi_i}(\omega_j) \leq_X p_{\Psi_i}(\omega_k)$$

Le choix de ensembles  $(X, \leq_X)$  doit être adapté aux priorités que l'on souhaite représenter. Plusieurs cas sont possibles selon la nature qualitative ou quantitative des priorités.

**Priorités exprimées qualitativement** Si l'agent dispose de priorités qualitatives entre les interprétations, il exprime alors directement un pré-ordre entre celles-ci. Ce pré-ordre peut être représenté en utilisant comme ensemble le corps  $X\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ , et en construisant la fonction de pondération comme expliqué en section 6.3, page 64. Chaque polynôme de poids interne représente alors la décomposition en base 2 du rang moins un de l'interprétation à laquelle il est attaché dans le pré-ordre  $\leq_{\Psi_i}$ .

**Priorités exprimées quantitativement** Si l'agent est capable de quantifier les priorités entre les interprétations, nous pouvons représenter ces priorités par un pré-ordre basé sur des polynômes en utilisant comme ensemble des coefficients  $X = \mathbb{N}$  ou encore  $X = \mathbb{R}^+$ , comme nous l'avons expliqué en section 6.3.2, page 65. Ces ensembles sont choisis comme étant l'ensemble des valeurs de la fonction de pondération  $w_{\Psi_i}$  définie par l'agent et attachant à chaque interprétation un poids. La fonction  $w_{\Psi_i}$  peut être définie explicitement ou implicitement.

Bien que ces cas soient conceptuellement différents, ils n'interviennent que sur la définition de la fonction de pondération. Qu'un pré-ordre soit qualitatif, quantitatif, explicite, implicite ou non défini, nous définissons dans chaque cas une fonction de pondération. L'exemple suivant illustre la pondération des interprétations de  $\mathcal{W}$  par des polynômes en fonction de priorités définies explicitement.

**Exemple 15** Nous récapitulons ici les exemples 8 et 9 des pages 66 et 67 dans lequel  $E = \{K_1, K_2, K_3\}$  est un ensemble de bases propositionnelles représentant les croyances observables d'un ensemble d'états épistémiques tel que :

$$\begin{aligned} K_1 &= \{(s \vee o) \wedge \neg d\} \\ K_2 &= \{(\neg s \wedge d \wedge \neg o) \vee (\neg s \wedge \neg d \wedge o)\} \\ K_3 &= \{s \wedge o \wedge d\} \end{aligned}$$

**Priorités qualitatives** Pour chaque état épistémique un pré-ordre est défini arbitrairement. Les pré-ordres associés à chaque état épistémique  $\Psi_i$  sont par exemple :

$$\leq_{\Psi_1}: \omega_4 =_{\Psi_1} \omega_5 =_{\Psi_1} \omega_1 =_{\Psi_1} \omega_0 <_{\Psi_1} \omega_3 =_{\Psi_1} \omega_6 =_{\Psi_1} \omega_7 <_{\Psi_1} \omega_2$$

$$\leq_{\Psi_2}: \omega_1 =_{\Psi_2} \omega_2 <_{\Psi_2} \omega_0 <_{\Psi_2} \omega_3 <_{\Psi_2} \omega_4 =_{\Psi_2} \omega_5 =_{\Psi_2} \omega_6 <_{\Psi_2} \omega_7$$

$$\leq_{\Psi_3}: \omega_7 <_{\Psi_3} \omega_3 =_{\Psi_3} \omega_5 =_{\Psi_3} \omega_6 <_{\Psi_3} \omega_1 =_{\Psi_3} \omega_2 =_{\Psi_3} \omega_4 <_{\Psi_3} \omega_0$$

Les rangs moins 1  $rk_{\Psi_1} - 1$ ,  $rk_{\Psi_2} - 1$  et  $rk_{\Psi_3} - 1$  des interprétations dans les pré-ordres  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  et  $\Psi_3$  sont donc :

$\omega$	$r_{\Psi_1}(\omega) - 1$	$r_{\Psi_2}(\omega) - 1$	$r_{\Psi_3}(\omega) - 1$
$\omega_0$	1	1	3
$\omega_1$	0	0	2
$\omega_2$	2	0	2
$\omega_3$	1	2	1
$\omega_4$	0	3	2
$\omega_5$	0	3	1
$\omega_6$	1	3	1
$\omega_7$	1	4	0

Les polynômes de poids interne sont construits par la décomposition en base 2 du rang moins un de chaque interprétation (comme expliqué en section 5.3, page 53), ce qui donne :

$\omega$	$p_{\Psi_1}(\omega)$	$p_{\Psi_2}(\omega)$	$p_{\Psi_3}(\omega)$
$\omega_0$	$x$	$x^2$	$1 + x$
$\omega_1$	0	0	1
$\omega_2$	1	0	1
$\omega_3$	$x$	$x$	$x$
$\omega_4$	0	$x + x^2$	1
$\omega_5$	0	$x + x^2$	$x$
$\omega_6$	$x$	$x + x^2$	$x$
$\omega_7$	$x$	1	0

En utilisant le pré-ordre lexicographique  $\leq_{LEX}$  pour comparer les polynômes, nous retrouvons bien les pré-ordres  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  et  $\Psi_3$ . en effet :

Pour  $\Psi_1$  le pré-ordre  $\leq_{LEX}$  donne :

$$p_{\Psi_1}(\omega_1) = p_{\Psi_1}(\omega_4) = p_{\Psi_1}(\omega_5) < p_{\Psi_1}(\omega_0) = p_{\Psi_1}(\omega_3) = p_{\Psi_1}(\omega_6) = p_{\Psi_1}(\omega_7) < p_{\Psi_1}(\omega_2)$$

Pour  $\Psi_2$  le pré-ordre  $\leq_{LEX}$  donne :

$$p_{\Psi_2}(\omega_1) = p_{\Psi_2}(\omega_2) < p_{\Psi_2}(\omega_0) < p_{\Psi_2}(\omega_3) < p_{\Psi_2}(\omega_4) = p_{\Psi_2}(\omega_5) = p_{\Psi_2}(\omega_6) < p_{\Psi_2}(\omega_7)$$

Pour  $\Psi_3$  le pré-ordre  $\leq_{LEX}$  donne :

$$p_{\Psi_3}(\omega_7) < p_{\Psi_3}(\omega_3) = p_{\Psi_3}(\omega_5) = p_{\Psi_3}(\omega_6) < p_{\Psi_3}(\omega_1) = p_{\Psi_3}(\omega_2) = p_{\Psi_3}(\omega_4) < p_{\Psi_3}(\omega_0)$$

**Priorités quantitatives** Imaginons que pour obtenir les priorités entre les cours possibles le professeur ait soumis toutes les configurations possibles de son cours à chaque groupe d'élèves et demandé d'effectuer un vote. Le vote est tel qu'à chaque fois qu'une configuration ne convient pas à un élève, il la marque comme indésirable. Les configurations ayant le plus de voix sont donc les moins prioritaires. L'agent traitant les résultats des votes voit chaque configuration de cours comme une interprétation leur affecte un poids  $w_{\Psi_i}$  représentant le nombre d'élève ayant voté contre elle dans le groupe  $i$ . Bien que les priorités entre les configurations de cours nous intéressent, nous voulons également conserver le résultat des votes exprimés dans chaque groupe. Les polynômes de poids internes sont alors des polynômes constants avec pour ensemble de coefficient l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  (comme expliqué en section 5.4, page 57). Nous avons alors les fonctions de pondérations  $p_{\Psi_1}$ ,  $p_{\Psi_2}$  et  $p_{\Psi_3}$  suivantes :

	$\omega_0$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$	$\omega_7$
$p_{\Psi_1} = w_{\Psi_1}$	5	0	9	7	0	0	7	7
$p_{\Psi_2} = w_{\Psi_2}$	2	0	0	3	4	4	4	5
$p_{\Psi_3} = w_{\Psi_3}$	7	5	5	2	5	2	2	0

Chaque polynôme  $p_{\Psi_i}(\omega)$  représente le nombre d'élèves du groupe  $i$  ayant voté contre une la configuration de cours représentée par  $\omega$ .

### 7.1.2 Calcul du poids global

Dans l'approche sémantique, la fusion de bases propositionnelles combine les pré-ordres internes et le pré-ordre externe afin de construire un pré-ordre global sur les interprétations. Dans le cadre réversible, les pré-ordres sont représentés par des polynômes.

La réversibilité a pour but de retrouver les pré-ordres originaux à partir du pré-ordre global. La condition principale pour que cette propriété soit vérifiée est que les poids globaux soient indépendants de la méthode de fusion. Seule la façon de comparer les polynômes change en fonction de l'opérateur de fusion utilisé. De plus, le poids global doit être construit de manière à ce qu'il soit possible de retrouver les poids locaux à partir desquels il a été construit.

Les polynômes sont des outils adaptés à notre problème. Nous construisons un polynôme de poids global comme la composition des polynômes de poids locaux. Chaque polynôme de poids local devient alors un coefficient du polynôme de poids global en s'assurant que jamais deux coefficients ne partagent une même puissance.

La définition formelle du poids global permettant de garantir la réversibilité repose sur la définition d'un poids externe global.

**Définition 74** Soit  $q_C(\xi_i)$  les poids externes pour les couples  $\xi_i$ ,  $i \leq 1 \leq n$ . Le poids externe global est défini par :

$$q_{\oplus} = \sum_{i=0}^{n-1} q_C(\xi_{i+1})x^i$$

A partir du polynôme correspondant au poids externe global, il est possible de retrouver les poids externes de chaque état épistémique par  $q_C(\xi_i) = (q_{\oplus} \bmod x^i) / x^{i-1}$ .

Le poids global doit prendre en compte le pré-ordre externe sur les bases propositionnelles. Cependant, les bases ne peuvent être identifiées de façon unique par leur rang. Il faut définir la notion de rang absolu au moyen d'une fonction inversible.

**Définition 75** Soit  $\mathcal{C} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  un ensemble de couples représentant un ensemble d'états épistémiques. Une fonction de rang absolu, notée  $r$ , est une fonction de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{N}^*$  qui associe à chaque couple  $\xi_i$  un rang absolu  $r_C(\xi_i)$  tel que :

- Si  $\xi_i <_C \xi_j$  alors  $r_C(\xi_i) < r_C(\xi_j)$
- Si  $\xi_i =_C \xi_j$  et  $i < j$  alors  $r_C(\xi_i) < r_C(\xi_j)$

La fonction  $r_C$  est inversible et est construite de manière à ce qu'à un entier corresponde un seul couple. L'exemple suivant illustre la construction d'une fonction de rang absolu.

**Exemple 16** Comme rappelé dans l'exemple 14 page 89, à chaque source d'information  $S_i$  correspond un état épistémique  $\Psi_i$  représenté sémantiquement par un couple  $\xi_i = \{\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i}\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Le pré-ordre externe de l'exemple 14 est le pré-ordre entre les couples défini par :

$$\xi_3 \leq_C \xi_1 =_C \xi_2$$

Les poids externes associés à chaque couple sont  $q_C(\xi_1) = 2$ ,  $q_C(\xi_2) = 2$  et  $q_C(\xi_3) = 1$ . Le poids externe global est construit en utilisant la formule  $q_{\oplus} = \sum_{i=0}^{n-1} q_C(\xi_{i+1})x^i$ . Nous avons donc :

$$\begin{aligned} q_{\oplus} &= q_C(\xi_1) + q_C(\xi_2)x + q_C(\xi_3)x^2 \\ &= 2 + 2x + x^2 \end{aligned}$$

La fonction de rang absolu sur  $\mathcal{C}$  est telle que  $r_C(\xi_1) = 2$ ,  $r_C(\xi_2) = 3$  et  $r_C(\xi_3) = 1$ . Cette fonction est inversible et à chaque entier correspond un couple représentant un état épistémique :  $r_C^{-1}(1) = \xi_3$ ,  $r_C^{-1}(2) = \xi_1$  et  $r_C^{-1}(3) = \xi_2$ .

Le poids global d'une interprétation est la somme de tous les poids internes décalés autant de fois que nécessaire afin que tous leurs supports soient deux à deux disjoints. La valeur du décalage est fonction du rang absolu du couple  $\xi_i$  auquel correspond le poids interne. Un couple avec un petit rang absolu entraîne un faible décalage, et inversement. Plus formellement :

**Définition 76** Soit  $\mathcal{C} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  un ensemble d'états épistémiques. Soit  $p_{\Psi_i}(\omega)$ , avec  $1 \leq i \leq n$  les poids internes,  $q_C$  la fonction de pondération externe et  $r_C$  la fonction de rang absolu pour  $\mathcal{C}$ . Le poids global, noté  $p_{\Psi_1 \oplus \dots \oplus \Psi_n}(\omega)$ , pour une interprétation  $\omega$  est tel que :

$$p_{\Psi_1 \oplus \dots \oplus \Psi_n}(\omega) = \sum_{i=1}^n p_{\Psi_i}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_i)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}}$$

avec

$$MAX_{r_C^{-1}(j)} = \max_{\omega' \in \mathcal{W}} (deg(p_{r_C^{-1}(j)}(\omega')) + 1)$$

Pour plus de lisibilité, nous écrivons  $p_{\oplus}(\omega)$  au lieu de  $p_{\Psi_1 \oplus \dots \oplus \Psi_n}(\omega)$ . A aucun moment de la construction du poids global il n'est pris en compte la stratégie  $p$  qui sera utilisée pour procéder à la fusion. La construction des poids globaux est bien indépendante du processus de fusion. L'exemple suivant illustre la construction de poids globaux.

**Exemple 17** Poursuivons l'exemple 15. Nous avons un ensemble  $\mathcal{C} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  de trois couples représentant les états épistémiques obtenus après qu'un professeur ait demandé à ses élèves de choisir entre des configurations possibles pour des cours de langage de programmation. Nous nous plaçons dans le cas où le professeur a demandé à ses élèves de donner des priorités qu'ils souhaiteraient pour l'apprentissage des différents langages. Le résultat des classements des élèves a permis de construire les fonctions de pondération internes pour chaque couple telles que :

$\omega$	$p_{\Psi_1}(\omega)$	$p_{\Psi_2}(\omega)$	$p_{\Psi_3}(\omega)$
$\omega_0$	$x$	$x^2$	$1 + x$
$\omega_1$	0	0	1
$\omega_2$	1	0	1
$\omega_3$	$x$	$x$	$x$
$\omega_4$	0	$x + x^2$	1
$\omega_5$	0	$x + x^2$	$x$
$\omega_6$	$x$	$x + x^2$	$x$
$\omega_7$	$x$	1	0

Ce qui permet d'exprimer les pré-ordres suivant :

$$\begin{aligned} \leq_{\Psi_1}: \omega_1 =_{\Psi_1} \omega_4 =_{\Psi_5} \omega_1 <_{\Psi_1} \omega_0 =_{\Psi_1} \omega_3 =_{\Psi_1} \omega_6 =_{\Psi_1} \omega_7 <_{\Psi_1} \omega_2 \\ \leq_{\Psi_2}: \omega_1 =_{\Psi_2} \omega_2 <_{\Psi_2} \omega_0 <_{\Psi_2} \omega_3 <_{\Psi_2} \omega_4 =_{\Psi_2} \omega_5 =_{\Psi_2} \omega_6 <_{\Psi_2} \omega_7 \\ \leq_{\Psi_3}: \omega_7 <_{\Psi_3} \omega_3 =_{\Psi_3} \omega_5 =_{\Psi_3} \omega_6 <_{\Psi_3} \omega_1 =_{\Psi_3} \omega_2 =_{\Psi_3} \omega_4 <_{\Psi_3} \omega_0 \end{aligned}$$

Le professeur n'a pas une confiance égale dans tous les groupes. Le groupe 3 est celui à qui il accorde le plus de crédit. En revanche, il n'a pas de préférence entre les groupes 1 et 2. Nous pouvons traduire ces priorités par un pré-ordre sur  $\mathcal{C}$  tel que :

$$\xi_3 \leq_{\mathcal{C}} \xi_1 =_{\mathcal{C}} \xi_2$$

ce se traduit par la fonction de pondération externe :  $q_{\mathcal{C}}(\xi_1) = 2$ ,  $q_{\mathcal{C}}(\xi_2) = 2$  et  $q_{\mathcal{C}}(\xi_3) = 1$ . La fonction de rang absolu étant :  $r_{\mathcal{C}}(\xi_1) = 2$ ,  $r_{\mathcal{C}}(\xi_2) = 3$  et  $r_{\mathcal{C}}(\xi_3) = 1$ .

Le calcul des polynôme globaux globaux internes est effectué en utilisant la formule de la définition 76 avec ici :

$$\begin{aligned} MAX_{\xi_1} &= \max_{\omega' \in \mathcal{W}} \deg(p_{\Psi_1}(\omega')) + 1 = \deg(x) + 1 = 2 \\ MAX_{\xi_2} &= \max_{\omega' \in \mathcal{W}} \deg(p_{\Psi_1}(\omega')) + 1 = \deg(x + x^2) + 1 = 3 \\ MAX_{\xi_3} &= \max_{\omega' \in \mathcal{W}} \deg(p_{\Psi_1}(\omega')) + 1 = \deg(x) + 1 = 2 \end{aligned}$$

La formule de calcul du poids global d'une interprétation étant :

$$p_{\oplus}(\omega) = \sum_{i=1}^n p_{\Psi_i}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_{\mathcal{C}}(\xi_i)-1} MAX_{r_{\mathcal{C}}^{-1}(j)}}$$

Avec les valeurs des  $MAX_{\xi_i}$  calculées précédemment, nous avons :

$$p_{\oplus}(\omega) = \sum_{i=1}^n p_{\Psi_i}(\omega) + p_{\Psi_1}(\omega)x^{MAX_{\xi_3}} + p_{\Psi_1}(\omega)x^{MAX_{\xi_3}+MAX_{\xi_1}}$$

Soit au final la formule :

$$p_{\oplus}(\omega) = \sum_{i=1}^n p_{\Psi_i}(\omega) + p_{\Psi_1}(\omega)x^2 + p_{\Psi_1}(\omega)x^4$$

Nous pouvons alors calculer le poids global de chaque interprétation :

$$\begin{aligned} p_{\oplus}(\omega_0) &= p_{\Psi_3}(\omega_0) + p_{\Psi_1}(\omega_0)x^2 + p_{\Psi_2}(\omega_0)x^4 \\ &= 1 + x + x * x^2 + x^2 * x^4 \\ &= 1 + x + x^3 + x^6 \\ p_{\oplus}(\omega_1) &= p_{\Psi_3}(\omega_1) + p_{\Psi_1}(\omega_1)x^2 + p_{\Psi_2}(\omega_1)x^4 \\ &= 1 + 0 * x^2 + 0 * x^4 \\ &= 1 \\ p_{\oplus}(\omega_2) &= p_{\Psi_3}(\omega_2) + p_{\Psi_1}(\omega_2)x^2 + p_{\Psi_2}(\omega_2)x^4 \\ &= 1 + 1 * x^2 + 0 * x^4 \\ &= 1 + x^2 \\ p_{\oplus}(\omega_3) &= p_{\Psi_3}(\omega_3) + p_{\Psi_1}(\omega_3)x^2 + p_{\Psi_2}(\omega_3)x^4 \\ &= x + x * x^2 + x * x^4 \\ &= x + x^3 + x^5 \\ p_{\oplus}(\omega_4) &= p_{\Psi_3}(\omega_4) + p_{\Psi_1}(\omega_4)x^2 + p_{\Psi_2}(\omega_4)x^4 \\ &= 1 + 0 * x^2 + (x + x^2) * x^4 \\ &= 1 + x^5 + x^6 \\ p_{\oplus}(\omega_5) &= p_{\Psi_3}(\omega_5) + p_{\Psi_1}(\omega_5)x^2 + p_{\Psi_2}(\omega_5)x^4 \\ &= x + 0 * x^2 + (x + x^2) * x^4 \\ &= x + x^5 + x^6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
p_{\oplus}(\omega_6) &= p_{\Psi_3}(\omega_6) + p_{\Psi_1}(\omega_6)x^2 + p_{\Psi_2}(\omega_6)x^4 \\
&= x + x * x^2 + (x + x^2) * x^4 \\
&= x + x^3 + x^5 + x^6 \\
p_{\oplus}(\omega_7) &= p_{\Psi_3}(\omega_7) + p_{\Psi_1}(\omega_7)x^2 + p_{\Psi_2}(\omega_7)x^4 \\
&= 0 + x * x^2 + 1 * x^4 \\
&= x^3 + x^4
\end{aligned}$$

Le tableau suivant résume les poids internes associés aux interprétations ainsi que les poids globaux calculés :

$\omega$	$p_{\Psi_1}(\omega)$	$p_{\Psi_2}(\omega)$	$p_{\Psi_3}(\omega)$	$p_{\oplus}(\omega)$
$\omega_0$	$x$	$x^2$	$1 + x$	$1 + x + x^3 + x^6$
$\omega_1$	$0$	$0$	$1$	$1$
$\omega_2$	$1$	$0$	$1$	$1 + x^2$
$\omega_3$	$x$	$x$	$x$	$x + x^3 + x^5$
$\omega_4$	$0$	$x + x^2$	$1$	$1 + x^5 + x^6$
$\omega_5$	$0$	$x + x^2$	$x$	$x + x^5 + x^6$
$\omega_6$	$x$	$x + x^2$	$x$	$x + x^3 + x^5 + x^6$
$\omega_7$	$x$	$1$	$0$	$x^3 + x^4$

Nous ne nous attardons pas ici sur la construction du poids global dans le contexte de priorités exprimées quantitativement, en effet, la technique de construction est rigoureusement identique.

### 7.1.3 Fusion dans le cadre réversible

La fusion dans l'approche sémantique est la sélection des interprétations préférées suivant un pré-ordre global. Dans le cadre réversible, le pré-ordre global, noté  $\leq_{\Psi_1 \oplus_s \dots \oplus_s \Psi_n}$ , est le pré-ordre sur les poids globaux obtenu en utilisant une stratégie de fusion, notée  $s$ . Formellement :

**Définition 77** Soit  $\mathcal{C} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  un ensemble de  $n$  couples représentant un ensemble d'états épistémiques. Soit  $p_{\oplus}$  la fonction de pondération interne globale construite pour  $n$  couples et soit  $s$  une stratégie de fusion représentée par un pré-ordre sur les polynômes noté  $\leq_s$ . Le résultat de la fusion des  $n$  couples est un pré-ordre sur l'ensemble  $\mathcal{W}$  des interprétations noté  $\leq_{\Psi_1 \oplus_s \dots \oplus_s \Psi_n}$  et défini tel que :

$$\forall \omega, \omega' \in \mathcal{W}, \omega \leq_{\Psi_1 \oplus_s \dots \oplus_s \Psi_n} \omega' \text{ssi } p_{\oplus}(\omega) \leq_s p_{\oplus}(\omega')$$

Pour ces soucis de simplicité, nous notons généralement  $\Psi_1 \oplus_s \dots \oplus_s \Psi_n$  l'état épistémique résultant de la fusion des  $n$  états épistémiques  $\Psi_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . De plus, nous pouvons pour la même raison noter  $p_{\oplus}$  le poids global associé à une interprétation  $\omega$  et  $\leq_{\oplus}$  le pré-ordre total sur les poids globaux selon une stratégie  $s$ .

L'ensemble des croyances observables résultant de la fusion de  $n$  états épistémiques est noté  $K_1 \oplus_s \dots \oplus_s K_n$  et est défini tel que :

$$Mod(K_1 \oplus_s \dots \oplus_s K_n) = Mod(Bel(\Psi_1 \oplus_s \dots \oplus_s \Psi_n)) = \min(\mathcal{W}, \leq_{\oplus_s})$$

La définition du pré-ordre global repose sur le choix d'une stratégie de fusion. Les principales stratégies de fusion sont dans notre cadre représentées par les pré-ordres  $MAX$ ,  $SUM$ ,  $WS$ ,  $LEX$ ,  $\mathcal{GMAX}$  définis en section 5.2, page 52. La stratégie  $MAX$  écarte du résultat de la fusion les interprétations qui contredisent trop une base. Les stratégies  $SUM$ ,  $WS$  sélectionnent les interprétations prioritaires dans le plus grand nombre d'état épistémiques, avec une pondération possible des états épistémiques pour  $WS$ . Les stratégies  $LEX$ ,  $\mathcal{GMAX}$  sont quand à elles basées sur un choix lexicographique. Ces deux stratégies sont à part car elles utilisent l'ordre d'apparition des poids internes dans le poids global. Cependant, la construction du poids global utilisant le pré-ordre externe sur les couples  $\xi_i$  pour construire les poids globaux, l'utilisation de l'ordre d'apparition des poids internes n'est plus problématique. L'exemple suivant permet d'illustrer le processus complet de fusion dans le cadre réversible.

**Exemple 18** Nous poursuivons l'exemple 17. Soit  $s$  une stratégie de fusion. Le pré-ordre total correspondant à la fusion  $\xi_1 \oplus_s \xi_2 \oplus_s \xi_3$  est tel que :

$$\forall \omega, \omega' \in \mathcal{W}, \omega \leq_{\oplus_s} \omega' \text{ ssi } p_{\oplus}(\omega) \leq_s p_{\oplus}(\omega')$$

Le tableau suivant montre les rangs des interprétations dans les pré-ordres globaux en fonction de la stratégie  $s$  choisie.

$\omega$	$rk_{MAX}(\omega)$	$rk_{SUM}(\omega)$	$rk_{WS}(\omega)$	$rk_{LEX}(\omega)$	$rk_{GMAX}(\omega)$
$\omega_0$	1	4	5	8	4
$\omega_1$	1	1	1	5	1
$\omega_2$	1	2	2	7	2
$\omega_3$	1	3	5	3	3
$\omega_4$	1	3	4	6	3
$\omega_5$	1	3	4	2	3
$\omega_6$	1	4	6	4	4
$\omega_7$	1	2	3	1	2

Les nouveaux pré-ordres sont :

$$\leq_{MAX}: \omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \omega_6 = \omega_7$$

$$\leq_{SUM}: \omega_1 < \omega_2 = \omega_7 < \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 < \omega_0 = \omega_6$$

$$\leq_{WS}: \omega_1 < \omega_2 < \omega_7 < \omega_4 = \omega_5 < \omega_0 = \omega_3 < \omega_6$$

$$\leq_{LEX}: \omega_7 < \omega_5 < \omega_3 < \omega_6 < \omega_1 < \omega_4 < \omega_2 < \omega_0$$

$$\leq_{GMAX}: \omega_1 < \omega_2 = \omega_7 < \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 < \omega_0 = \omega_6$$

Le résultat de la fusion est représenté sémantiquement par l'ensemble des interprétations minimales dans le pré-ordre global choisi. Pour chaque stratégie de fusion les résultats sont donc :

$$Mod(Bel(\Psi_{\oplus_{MAX}})) = \mathcal{W}$$

$$Mod(Bel(\Psi_{\oplus_{SUM}})) = \{\omega_1\}$$

$$Mod(Bel(\Psi_{\oplus_{WS}})) = \{\omega_1\}$$

$$Mod(Bel(\Psi_{\oplus_{LEX}})) = \{\omega_7\}$$

$$Mod(Bel(\Psi_{\oplus_{GMAX}})) = \{\omega_1\}$$

Dans le cas particulier de la représentation de priorités qualitatives par des polynômes à coefficient dans  $\mathbb{F}_2$ , la stratégie  $MAX$  ne permet que de différencier interprétations modèles de toutes les croyances apportés par les états épistémiques. Les stratégies  $SUM$  et  $WS$  ont un comportement standard ce qui explique le même résultat pour ces stratégies,  $\omega_7$  étant modèle des croyances issus de deux états épistémiques. La stratégie  $LEX$  donne la priorité aux interprétations associées aux croyances de l'état épistémique prioritaire  $\Psi_3$ , d'où le résultat de la fusion constitué uniquement par  $\omega_7$ . La stratégie  $GMAX$  est un affinage de  $MAX$ , cependant, la notion de maximum n'étant pas déterminante dans ce contexte particulier,  $GMAX$  a le même comportement que  $SUM$ .

Nous étudions maintenant la réversibilité du processus de fusion.

### 7.1.4 Réversibilité du processus de fusion

La réversibilité permet de retrouver les poids internes et externes pour les couples fusionnés. Le processus de réversibilité est composé de deux phases. La première consiste à retrouver le nombre de couples fusionnés et les poids externes associés aux couples. La seconde est le calcul des poids internes à partir des poids globaux.

**Retrouver le pré-ordre externe** Le nombre de couples fusionnés est donné par le degré du polynôme de poids externe global plus un. En effet, la construction du polynôme de poids global externe définie en 74, page 91 construit un polynôme dont chaque coefficient est un poids externe. En effet :  $q_{\oplus} = \sum_{i=0}^{n-1} q_C(\xi_{i+1})x^i$ . A partir de ce polynôme nous retrouvons le nombre de couples fusionnés grâce au degré plus un de  $q_{\oplus}$ . Nous avons :

$$\text{card}(\mathcal{C}) = \deg(q_{\oplus}) + 1;$$

Afin de retrouver le poids externe  $q_C(\xi_i)$  associé à chaque couple  $\xi_i$  nous isolons le coefficient recherché. Formellement :

$$q_C(\xi_i) = \frac{q_{\oplus} \bmod x^i}{x^{i-1}}$$

A partir des  $q_C(\xi_i)$  nous retrouvons le rang absolu de chaque couple  $\xi_i$ . Ces informations permettent de retrouver les poids internes en fonction des poids globaux.

**Retrouver les pré-ordres internes** La construction des poids globaux décale les poids internes en fonction du rang absolu afin d'avoir des supports disjoints. L'opération inverse consiste à découper le poids global en poids internes en décalant à chaque fois le polynôme par le degré maximum du support correspondant au plus grand poids interne du couple. Plus formellement, la réversibilité permet de retrouver les poids internes  $p_{\Psi_i}(\omega)$  pour chaque couple, et donc pour chaque état épistémique  $\Psi_i$ . Pour une interprétation  $\omega$  nous avons :

$$p_{\Psi_i}(\omega) = \frac{p_{\oplus}(\omega) \bmod x^{\sum_{l=1}^{r_C(\xi_i)} \text{MAX}_{r_C^{-1}(l)}}}{x^{\sum_{k=1}^{r_C(\xi_i)-1} \text{MAX}_{r_C^{-1}(k)}}}$$

L'exemple suivant illustre la réversibilité du processus de fusion.

**Exemple 19** Nous illustrons maintenant la réversibilité dans notre cadre. Nous disposons d'un état épistémique  $\Psi_{\oplus_s}$  résultat de la fusion d'un ensemble de couples représentant un ensemble d'états épistémiques. La connaissance de l'état épistémique  $\Psi_{\oplus_s}$  se traduit par la disponibilité d'un polynôme de poids externe global et d'un ensemble de polynômes globaux. Nous reprenons ici les polynômes globaux obtenus dans les exemples 17 page 92 et 16 page 92. Nous avons donc :

$$q_{\oplus} = 2 + 2x + x^2$$

mais aussi :

$\omega$	$p_{\oplus}(\omega)$
$\omega_0$	$1 + x + x^3 + x^6$
$\omega_1$	1
$\omega_2$	$1 + x^2$
$\omega_3$	$x + x^3 + x^5$
$\omega_4$	$1 + x^5 + x^6$
$\omega_5$	$x + x^5 + x^6$
$\omega_6$	$x + x^3 + x^5 + x^6$
$\omega_7$	$x^3 + x^4$

A partir du polynôme  $q_{\oplus}$  nous pouvons retourner le nombre  $n$  de couples - et donc d'états épistémiques - fusionnés.

$$n = \deg(q_{\oplus}) + 1 = 2 + 1 = 3$$

L'ensemble de couples fusionnés peut être noté  $\mathcal{C} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ . Nous calculons maintenant les poids externes associés à chaque couple en utilisant la formule :

$$q_{\mathcal{C}}(\xi_i) = \frac{q_{\oplus} \bmod x^i}{x^{i-1}}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{C}}(\xi_1) &= \frac{q_{\oplus} \bmod x^1}{x^{1-1}} \\ &= 2 + 2x + x^2 \bmod x \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{C}}(\xi_2) &= \frac{2+2x+x^2 \bmod x^2}{x} \\ &= \frac{2+2x}{x} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{C}}(\xi_3) &= \frac{2+2x+x^2 \bmod x^3}{x^2} \\ &= \frac{2+2x+x^2}{x^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ceci permet de calculer les rangs absolus  $r_{\mathcal{C}}(\xi_1) = 2$ ,  $r_{\mathcal{C}}(\xi_2) = 3$  et  $r_{\mathcal{C}}(\xi_3) = 1$ .

Afin de retrouver les poids internes originaux des interprétations nous utilisons la formule :

$$p_{\Psi_i}(\omega) = \frac{p_{\oplus}(\omega) \bmod x^{\sum_{l=1}^{r_{\mathcal{C}}(\xi_i)} MAX_{r_{\mathcal{C}}^{-1}(l)}}}{x^{\sum_{k=1}^{r_{\mathcal{C}}(\xi_i)-1} MAX_{r_{\mathcal{C}}^{-1}(k)}}}$$

La réversibilité n'est utilisable que si les degrés maximum des poids internes ont été conservés. Cette hypothèse n'est pas pénalisante dans la pratique car elle n'entraîne que la conservation de  $n$  entiers. Ici les maximums conservés sont :

$$\begin{aligned} MAX_{\xi_1} &= \max_{\omega' \in \mathcal{W}} \deg(p_{\Psi_1}(\omega')) + 1 = \deg(x) + 1 = 2 \\ MAX_{\xi_2} &= \max_{\omega' \in \mathcal{W}} \deg(p_{\Psi_1}(\omega')) + 1 = \deg(x + x^2) + 1 = 3 \\ MAX_{\xi_3} &= \max_{\omega' \in \mathcal{W}} \deg(p_{\Psi_1}(\omega')) + 1 = \deg(x) + 1 = 2 \end{aligned}$$

Les formules de calcul des poids internes sont donc :

$$\begin{aligned} p_{\Psi_1}(\omega) &= \frac{p_{\oplus}(\omega) \bmod x^{MAX_{\xi_3} + MAX_{\xi_1}}}{x^{MAX_{\xi_3}}} \\ &= \frac{p_{\oplus}(\omega) \bmod x^{2+2}}{x^2} \\ &= \frac{p_{\oplus}(\omega) \bmod x^4}{x^2} \\ p_{\Psi_2}(\omega) &= \frac{p_{\oplus}(\omega) \bmod x^{MAX_{\xi_3} + MAX_{\xi_1} + MAX_{\xi_2}}}{x^{MAX_{\xi_3} + MAX_{\xi_1}}} \\ &= \frac{p_{\oplus}(\omega) \bmod x^{2+2+3}}{x^{2+2}} \\ &= \frac{p_{\oplus}(\omega) \bmod x^7}{x^4} \\ p_{\Psi_3}(\omega) &= \frac{p_{\oplus}(\omega) \bmod x^{MAX_{\xi_3}}}{x^0} \\ &= \frac{p_{\oplus}(\omega) \bmod x^2}{x^0} \\ &= p_{\oplus}(\omega) \bmod x^2 \end{aligned}$$

Il est possible de retrouver les poids internes de chaque interprétation. Pour  $\omega_0$  :

$$\begin{aligned} p_{\Psi_1}(\omega_0) &= \frac{p_{\oplus}(\omega_0) \bmod x^4}{x^2} \\ &= \frac{1+x+x^3+x^6 \bmod x^4}{x^2} \\ &= \frac{1+x+x^3}{x^2} \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{\Psi_2}(\omega_0) &= \frac{p_{\oplus}(\omega_0) \bmod x^7}{x^4} \\ &= \frac{1+x+x^3+x^6 \bmod x^7}{x^4} \\ &= \frac{1+x+x^3+x^6}{x^4} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{\Psi_3}(\omega) &= p_{\oplus}(\omega) \bmod x^2 \\ &= 1 + x + x^3 + x^6 \bmod x^2 \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

Le calcul des poids internes de chaque interprétation de  $\mathcal{W}$  est identique à celui exposé ci dessus. A partir de tous les poids internes et de tous les poids externes retrouvés, le pré-ordre externe sur l'ensemble des couples représentant des états épistémiques et les pré-ordres internes sont immédiatement obtenus.

## 7.2 Approche Syntaxique

Soit  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$  un ensemble de  $n$  bases pondérées. Chaque base  $\Sigma_i$  correspondant à une source d'information est un ensemble de formules pondérées défini par :

$$\Sigma_i = \{(\phi_j, p_{\Sigma_i}(\phi_j)) \mid \phi_j \in \mathcal{L}_{PC}, p_{\Sigma_i}(\phi_j) \in X[x]\}$$

Où  $X$  est un ensemble fini muni d'un pré-ordre total. Les préférences externes et internes sont formalisées de la manière suivante.

### 7.2.1 Pré-ordres externes et internes

Dans le cadre réversible de la fusion pour l'approche syntaxique, la préférence externe et les préférences internes correspondent respectivement à un pré-ordre externe sur les bases pondérées et à des pré-ordres internes sur les formules représentés par des polynômes. Dans l'approche syntaxique, la relation entre préférences et pré-ordres est telle que les éléments préférés sont les maximaux des pré-ordres. Contrairement à l'approche sémantique.

#### Pré-ordre externe représenté par des polynômes

La définition formelle d'un pré-ordre externe repose sur la définition d'une fonction de pondération externe pour un ensemble de sources.

**Définition 78** Soit  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$  un ensemble de bases pondérées. Une fonction de pondération externe, notée  $q$  est une application telle que :

$$\begin{aligned} q : \mathcal{B} &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ \Sigma_i &\longrightarrow q_{\mathcal{B}}(\Sigma_i) \end{aligned}$$

A partir de la fonction de pondération externe, nous définissons un pré-ordre externe sur l'ensemble des bases pondérées, noté  $\leq_{\mathcal{B}}$ .

**Définition 79** Un pré-ordre externe sur un ensemble de bases pondérées  $\mathcal{B}$  est défini par :

$$\forall \Sigma_i, \Sigma_j \in \mathcal{B}, \Sigma_i \leq_{\mathcal{B}} \Sigma_j \text{ ssi } q_{\mathcal{B}}(\Sigma_i) \leq q_{\mathcal{B}}(\Sigma_j)$$

Deux cas se présentent. Soit les sources sont ordonnées explicitement. Dans ce cas les poids  $q_B(\Sigma_i)$  sont codés par des polynômes constants. Soit les sources ne sont pas ordonnées. Toutes les bases sont donc préférées, et dans ce cas,  $q$  est telle que  $\forall \Sigma_i \in \mathcal{B}$ ,  $q_B(\Sigma_i) = 1$ , c'est à dire le polynôme nul.

### Pré-ordre interne représenté par des polynômes

La définition formelle d'un pré-ordre interne repose sur la définition d'une fonction de pondération interne pour chaque base pondérée.

La notion de base stratifiée donnée ci-dessus induit déjà la notion de pré-ordre interne reposant sur les poids associés formules. Ceux-ci peuvent être définis comme les valeurs d'une fonction de pondération. Formellement :

**Définition 80** Soit  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$  un ensemble de base pondérées. Une fonction de pondération interne est telle que :

$$\begin{array}{ccc} p_{\Sigma_i} : & \Sigma_i & \longrightarrow X[x] \\ & \phi & \longrightarrow p_{\Sigma_i}(\phi) \end{array}$$

Où  $X$  est un ensemble fini muni d'un pré-ordre total.

Dans la plupart des cas,  $X$  est assimilé à l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  ou à l'ensemble des réels positifs  $\mathbb{R}^+$ . A partir de la fonction de pondération interne, il est possible de définir un pré-ordre interne pour une base pondérée  $\Sigma_i$ , noté  $\leq_{\Sigma_i}$ .

**Définition 81** Un pré-ordre interne sur les formules pour une base pondérée  $\Sigma_i$  avec une fonction de pondération  $p_{\Sigma_i}$  est défini par :

$$\forall \phi, \psi \in \Sigma_i, \phi \leq_{\Sigma_i} \psi \text{ ssi } p_{\Sigma_i}(\phi) \leq p_{\Sigma_i}(\psi)$$

Il existe trois cas pour une base  $\Sigma_i$ . Tout d'abord, le pré-ordre peut être défini arbitrairement. Dans ce cas, les poids  $p_{\Sigma_i}(\phi)$  sont codés par des polynômes, comme rappelé en 5. Ensuite, le pré-ordre peut être implicite. Les poids  $p_{\Sigma_i}$  peuvent être calculés suivant différents critères (présence de certaines variables propositionnelles, ...). Enfin, il n'y a pas de pré-ordre défini. Cela signifie que toutes les formules sont préférées. Pour cela, nous représentons les poids par le polynôme nul  $\forall \phi \in \Sigma_i, p_{\Sigma_i}(\phi) = 0$ .

**Exemple 20** Soit  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$  un ensemble de bases de croyances stratifiée tel que :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{(\neg d, x), (s \vee o, x), (s \vee \neg d \vee o, 1)\} \\ \Sigma_2 &= \{(\neg s, x + x^2), (d \vee o, x^2), (\neg d \vee \neg o, x), \\ &\quad (\neg s \vee \neg d \vee \neg o, 1)\} \\ \Sigma_3 &= \{(s, x), (d, x), (o, x), (s \vee d, 1), \\ &\quad (d \vee o, 1), (s \vee o, 1), (s \vee d \vee o, 1 + x)\} \end{aligned}$$

La base stratifiée  $\Sigma_3$  est considérée plus prioritaire que les bases  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , aucune priorité n'étant définie entre ces deux dernières. Le pré-ordre externe sur  $\mathcal{B}$  est donc :

$$\Sigma_3 <_{\mathcal{B}} \Sigma_1 =_{\mathcal{B}} \Sigma_2$$

A partir de ce pré-ordres nous pouvons construire la fonction de pondération externe  $q_B$  telle que  $q_B(\Sigma_1) = 2$ ,  $q_B(\Sigma_2) = 2$  et  $q_B(\Sigma_3) = 1$ .

Les fonctions de pondérations internes construites à partir des poids des formules sont pour la base  $\Sigma_1$  :

$\phi$	$p_{\Sigma_1}(\phi)$
$(\neg d, x)$	$x$
$(s \vee o, x)$	$x$
$(s \vee \neg d \vee o, 1)$	$1$

Pour la base de croyances stratifiées  $\Sigma_2$  :

$\phi$	$p_{\Sigma_2}(\phi)$
$(d \vee o, x^2)$	$x^2$
$(\neg d \vee \neg o, x)$	$x$
$(\neg s, x + x^2)$	$x + x^2$
$(\neg s \vee \neg d \vee \neg o, 1)$	$1$

Enfin, pour la base stratifiée  $\Sigma_3$  nous avons :

$\phi$	$p_{\Sigma_3}(\phi)$
$(s, x)$	$x$
$(d, x)$	$x$
$(o, x)$	$x$
$(s \vee d, 1)$	$1$
$(d \vee o, 1)$	$1$
$(s \vee o, 1)$	$1$
$(s \vee d \vee o, 1 + x)$	$1 + x$

### 7.2.2 Calcul de la base pondérée globale

La fusion de bases pondérées est la construction d'une source contenant toutes les informations de chaque base, puis toutes les informations commune à deux bases, et ainsi de suite jusqu'au informations communes à toutes les bases. L'étape préliminaire à la construction de la base pondérée globale est la construction d'un poids externe global. Le polynôme de poids externe global est défini par :

**Définition 82** Soit  $q_{\mathcal{B}}(\Sigma_i)$  les poids externes pour les bases pondérées  $\Sigma_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Le poids externe global est défini par  $q_{\otimes} = \sum_{i=0}^{n-1} q_{\mathcal{B}}(\Sigma_{i+1}) x^i$ .

A partir du polynôme correspondant au poids externe global, il est possible de retrouver les poids externes de chaque base pondérée par  $q_{\mathcal{B}}(\Sigma_i) = (q_{\otimes} \bmod x^i) / x^{i-1}$ .

La base pondérée globale est construite à partir de toutes les disjonctions possibles entre les formules de chaque base. A chaque disjonction est attaché un poids global. Celui-ci est calculé en fonction des poids des formules apparaissant dans la disjonction. Dans notre cadre, ce poids permet la réversibilité. Pour cela, il combine les polynômes représentant les poids internes de chaque formule apparaissant dans la disjonction de manière à pouvoir les retrouver. La même technique que pour l'approche sémantique est utilisée. La notion de décalage des supports est utilisée pour construire des polynômes de poids globaux. Ces polynômes prennent en compte le pré-ordre externe sur les bases pondérées. Nous avons donc besoin d'une fonction de rang absolu inversible.

**Définition 83** Soit  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$  un ensemble de bases pondérées. Une fonction de rang absolue, notée  $r$ , est une fonction de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathbb{N}$  qui associe à chaque base  $\Sigma_i$  un rang absolu  $r_{\mathcal{B}}(\Sigma_i)$  tel que :

- Si  $\Sigma_i <_{\mathcal{B}} \Sigma_j$  alors  $r_{\mathcal{B}}(\Sigma_i) < r_{\mathcal{B}}(\Sigma_j)$
- Si  $\Sigma_i =_{\mathcal{B}} \Sigma_j$  et  $i < j$  alors  $r_{\mathcal{B}}(\Sigma_i) < r_{\mathcal{B}}(\Sigma_j)$

Afin de construire la base pondérée globale, on définit  $D_k$  qui est la disjonction de  $k$  formules chacune provenant d'une seule base  $\Sigma_i$ . Formellement :

**Définition 84** On définit une disjonction de  $k$  formules provenant des bases pondérées  $\Sigma_i$  telle que :

$$D_k = \phi_{j_1} \vee \dots \vee \phi_{j_i} \vee \dots \vee \phi_{j_k}$$

- $\exists l, 1 \leq l \leq n$  tel que  $\forall i$  avec  $1 \leq i \leq k$   $(\phi_{j_i}, p_{\Sigma_l}(\phi_{j_i})) \in \Sigma_l$
- $\forall i, \forall m, 1 \leq i \leq k$  et  $1 \leq m \leq k$  si  $(\phi_{j_i}, p_{\Sigma_l}(\phi_{j_i})) \in \Sigma_l$  et  $(\phi_{j_m}, p_{\Sigma_{l'}}(\phi_{j_m})) \in \Sigma_{l'}$  alors  $l \neq l'$

De plus, on note  $s$  l'application qui à toute formule appartenant à  $D_k$  fait correspondre sa base pondérée d'origine. Formellement : Soit  $D_k = \phi_{j_1} \vee \dots \vee \phi_{j_i} \vee \dots \vee \phi_{j_k}$ , si  $(\phi_{j_i}, p_{\Sigma_l}(\phi_{j_i})) \in \Sigma_l$ , alors  $s(\phi_{j_i}) = \Sigma_l$ .

Grâce aux disjonctions  $D_k$  et à la fonction  $s$ , nous définissons le poids global d'une disjonction de formules.

**Définition 85** Soit  $D_k = \phi_{j_1} \vee \dots \vee \phi_{j_i} \vee \dots \vee \phi_{j_k}$  une disjonction de formules entre  $k$  bases stratifiées. correspond un poids global, noté  $p_{\Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n}(D_k)$  défini tel que :

$$p_{\Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n}(D_k) = \sum_{i=1}^k p_{s(\phi_{j_i})}(\phi_{j_i}) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(s(\phi_{j_i})) - 1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}}$$

avec

$$MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)} = \max_{\phi' \in \Sigma_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} (deg(p_{\Sigma_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}}(\phi')) + 1)$$

Pour plus de lisibilité, nous écrivons  $p_{\otimes}(D_k)$  au lieu de  $p_{\Sigma_1 \oplus \dots \oplus \Sigma_n}(D_k)$ . La base pondérée globale est formée par toutes les disjonctions de formules entre les bases de  $\mathcal{B}$  affectées d'un poids global. Plus formellement :

**Définition 86** Soit  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$  un ensemble de bases stratifiées. Soit  $D_k$  une disjonction de  $k$  formules. La base stratifiée globale, notée  $\Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n$  peut alors s'exprimer formellement :

$$\Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n = \bigcup_{k=1}^n \{(D_k, p_{\otimes}(D_k))\}$$

Dans la plupart des cas toutes les bases de croyances stratifiées de  $\mathcal{B}$  entrent en compte dans la construction de la base de croyances stratifiée globale. Nous notons alors celle ci  $\Sigma_{\otimes}$  afin d'en simplifier l'écriture. La construction de la base de croyances stratifiée globale est une opération commutative. En effet :

**Proposition 18** Soit  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux bases de croyances stratifiées et pré-ordonnées (c'est à dire pour lesquelles il est possible de définir une fonction de rang absolu), on a  $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 = \Sigma_2 \otimes \Sigma_1$



**Preuve 4**

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 &= \{ (\phi, p_{\otimes}(\phi)) \mid (\phi, p_{\Sigma_1}(\phi)) \in \Sigma_1, p_{\otimes}(\phi) = p_{\Sigma_1}(\phi) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(\Sigma_1)-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} \} \\
&\cup \{ (\psi, p_{\otimes}(\psi)) \mid (\psi, p_{\Sigma_2}(\psi)) \in \Sigma_2, p_{\otimes}(\psi) = p_{\Sigma_2}(\psi) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(\Sigma_2)-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} \} \\
&\cup \{ (\phi \vee \psi, p_{\otimes}(\phi \vee \psi)) \mid (\phi, p_{\Sigma_1}(\phi)) \in \Sigma_1, (\psi, p_{\Sigma_2}(\psi)) \in \Sigma_2, \\
&\quad p_{\otimes}(\phi \vee \psi) = \\
&\quad p_{\Sigma_1}(\phi) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(\Sigma_1)-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} + p_{\Sigma_2}(\psi) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(\Sigma_2)-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} \}
\end{aligned}$$

Commutativité de  $\cup$  :

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 &= \{ (\psi, p_{\otimes}(\psi)) \mid (\psi, p_{\Sigma_2}(\psi)) \in \Sigma_2, p_{\otimes}(\psi) = p_{\Sigma_2}(\psi) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(\Sigma_2)-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} \} \\
&\cup \{ (\phi, p_{\otimes}(\phi)) \mid (\phi, p_{\Sigma_1}(\phi)) \in \Sigma_1, p_{\otimes}(\phi) = p_{\Sigma_1}(\phi) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(\Sigma_1)-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} \} \\
&\cup \{ (\phi \vee \psi, p_{\otimes}(\phi \vee \psi)) \mid (\phi, p_{\Sigma_1}(\phi)) \in \Sigma_1, (\psi, p_{\Sigma_2}(\psi)) \in \Sigma_2, \\
&\quad p_{\otimes}(\phi \vee \psi) = \\
&\quad p_{\Sigma_1}(\phi) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(\Sigma_1)-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} + p_{\Sigma_2}(\psi) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(\Sigma_2)-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} \}
\end{aligned}$$

Commutativité de  $\vee$  et  $+$  :

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 &= \{ (\psi, p_{\otimes}(\psi)) \mid (\psi, p_{\Sigma_2}(\psi)) \in \Sigma_2, p_{\otimes}(\psi) = p_{\Sigma_2}(\psi) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(\Sigma_2)-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} \} \\
&\cup \{ (\phi, p_{\otimes}(\phi)) \mid (\phi, p_{\Sigma_1}(\phi)) \in \Sigma_1, p_{\otimes}(\phi) = p_{\Sigma_1}(\phi) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(\Sigma_1)-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} \} \\
&\cup \{ (\psi \vee \phi, p_{\otimes}(\psi \vee \phi)) \mid (\phi, p_{\Sigma_1}(\phi)) \in \Sigma_1, (\psi, p_{\Sigma_2}(\psi)) \in \Sigma_2, \\
&\quad p_{\otimes}(\psi \vee \phi) = \\
&\quad p_{\Sigma_2}(\psi) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(\Sigma_2)-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} + p_{\Sigma_1}(\phi) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(\Sigma_1)-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} \}
\end{aligned}$$

$$\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 = \Sigma_2 \otimes \Sigma_1$$

□

De manière similaire nous pouvons démontrer que la construction de la base de croyances stratifiée globale est une opération associative. La preuve de cette proposition est symétrique à la preuve de la commutativité. L'associativité est induite par l'associativité de  $\cup$ ,  $\vee$  et  $+$ .

L'exemple suivant illustre la construction d'une base de croyances stratifiée globale nécessaire pour la fusion de trois bases de croyances stratifiées.

**Exemple 21** Reprenons l'exemple 20 de la page 99 où  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$  est un ensemble de bases de croyances stratifiées tel que :

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \{(-d, x), (s \vee o, x), (s \vee \neg d \vee o, 1)\} \\
\Sigma_2 &= \{(\neg s, x + x^2), (d \vee o, x^2), (\neg d \vee \neg o, x), \\
&\quad (\neg s \vee \neg d \vee \neg o, 1)\} \\
\Sigma_3 &= \{(s, x), (d, x), (o, x), (s \vee d, 1), \\
&\quad (d \vee o, 1), (s \vee o, 1), (s \vee d \vee o, 1 + x)\}
\end{aligned}$$

L'étape préliminaire de la fusion des bases de croyances stratifiée de l'ensemble  $\mathcal{B}$  est la construction d'une base de croyances stratifiées globale composée de toutes les disjonctions de formules possibles entre les 3 bases de croyances originales attachées à des poids globaux. Nous pouvons diviser la construction de ces disjonctions en plusieurs parties. La première partie est la génération des disjonctions à 1 seul éléments. Il s'agit en réalité de faire l'union de toutes les bases en répondant les formules avec leur poids global. Pour les formules de  $\Sigma_1$ , le nouveau poids est calculé grâce à la formule :

$$\begin{aligned} p_{\otimes}(\phi) &= p_{\Sigma_1}(\phi) * x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(s(\phi_{j_i})) - 1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} \\ &= p_{\Sigma_1}(\phi) * x^{MAX_{\Sigma_3}} \\ &= p_{\Sigma_1}(\phi) * x^2 \end{aligned}$$

Nous pouvons alors construire la base  $\Sigma_{g_1}$  contenant les formules issues de  $\Sigma_1$  attachées à leurs poids globaux :

$$\Sigma_{g_1} = \{(\neg d, x^3), (s \vee o, x^3), (s \vee \neg d \vee o, x^2)\}$$

Pour les formules de  $\Sigma_2$ , les nouveau poids sont calculés grâce à la formule :

$$\begin{aligned} p_{\otimes}(\phi) &= p_{\Sigma_2}(\phi) * x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(s(\phi_{j_i})) - 1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} \\ &= p_{\Sigma_2}(\phi) * x^{MAX_{\Sigma_3} + MAX_{\Sigma_1}} \\ &= p_{\Sigma_2}(\phi) * x^{2+2} \\ &= p_{\Sigma_2}(\phi) * x^4 \end{aligned}$$

La construction de la base  $\Sigma_{g_2}$  contenant les formules de la base de croyances stratifiées  $\Sigma_2$  attachées aux poids globaux donne :

$$\Sigma_{g_2} = \{(\neg s, x^5 + x^6), (d \vee o, x^6), (\neg d \vee \neg o, x^5), (\neg s \vee \neg d \vee \neg o, x^4)\}$$

Pour les formules de  $\Sigma_3$ , les nouveaux poids sont calculés selon :

$$\begin{aligned} p_{\otimes}(\phi) &= p_{\Sigma_3}(\phi) * x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(s(\phi_{j_i})) - 1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} \\ &= p_{\Sigma_3}(\phi) * x^0 \end{aligned}$$

La base de croyances stratifiée  $\Sigma_{g_3}$  composée des formules provenant de la base  $\Sigma_3$  avec leurs nouveaux poids est alors :

$$\Sigma_{g_3} = \{(s, x), (d, x), (o, x), (s \vee d, 1), (d \vee o, 1), (s \vee o, 1), (s \vee d \vee o, 1 + x)\}$$

La base  $\Sigma_{g_3}$  est égale à la base  $\Sigma_3$  car il s'agit la base la plus prioritaires. Lors du calcul des poids globaux, ceux ci ne sont donc pas modifiés.

Les trois bases de croyances  $\Sigma_{g_1}$ ,  $\Sigma_{g_2}$  et  $\Sigma_{g_3}$  servent de base à la construction de la base de croyance stratifiée globale. La construction de  $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \Sigma_3$  étant associative, nous construisons tout d'abord la base  $\Sigma_1 \otimes \Sigma_3$  puis nous finissons la construction en construisant  $(\Sigma_1 \otimes \Sigma_3) \otimes \Sigma_2$ . La construction de la base de croyances stratifiée contenant toutes les disjonctions entre  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_3$  donne comme résultat :

$$\begin{aligned} \Sigma_{g_{13}} = \{ & (s \vee \neg d, x + x^3), (s \vee s \vee o, x + x^3), (s \vee s \vee \neg d \vee o, x + x^2), (d \vee \neg d, x + x^3), \\ & (d \vee s \vee o, x + x^3), (d \vee s \vee \neg d \vee o, x + x^2), (o \vee \neg d, x + x^3), (o \vee s \vee o, x + x^3), \\ & (o \vee s \vee \neg d \vee o, x + x^2), (s \vee d \vee \neg d, 1 + x^3), (s \vee d \vee s \vee o, 1 + x^3), \\ & (s \vee d \vee s \vee \neg d \vee o, 1 + x^2), (d \vee o \vee \neg d, 1 + x^3), (d \vee o \vee s \vee o, 1 + x^3), \\ & (d \vee o \vee s \vee \neg d \vee o, 1 + x^2), (s \vee o \vee \neg d, 1 + x^3), (s \vee o \vee s \vee o, 1 + x^3), \\ & (s \vee o \vee s \vee \neg d \vee o, 1 + x^2), (s \vee d \vee o \vee \neg d, 1 + x + x^3), (s \vee d \vee o \vee (s \vee o, 1 + x + x^3), \\ & (s \vee d \vee o \vee s \vee \neg d \vee o, 1 + x + x^2) \} \end{aligned}$$

Nous pouvons simplifier la base en retirant les tautologies, ce qui donne :

$$\Sigma_{g_{13}} = \{ (s \vee \neg d, x + x^3), (s \vee o, x + x^3), (s \vee \neg d \vee o, x + x^2), (\neg d \vee o, x + x^3), (s \vee o, 1 + x^3), (s \vee \neg d \vee o, 1 + x^2), (s \vee d \vee o, 1 + x + x^3) \}$$

La base de croyances  $\Sigma_1 \otimes \Sigma_3$  est alors :  $\Sigma_1 \otimes \Sigma_3 = \Sigma_{g_1} \cup \Sigma_{g_3} \cup \Sigma_{g_{13}}$ , ce qui donne :

$$\Sigma_1 \otimes \Sigma_3 = \{ (\neg d, x^3), (s \vee o, x^3), (s \vee \neg d \vee o, x^2), (s, x), (d, x), (o, x), (s \vee d, 1), (d \vee o, 1), \\ (s \vee o, 1), (s \vee d \vee o, 1+x), (s \vee \neg d, x+x^3), (s \vee o, x+x^3), (s \vee \neg d \vee o, x+x^2), \\ (\neg d \vee o, x+x^3), (s \vee o, 1+x^3), (s \vee \neg d \vee o, 1+x^2), (s \vee d \vee o, 1+x+x^3) \}$$

Nous pouvons maintenant construire  $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \Sigma_3$ .

$$\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \Sigma_3 = \{ (\neg d, x^3), (s \vee o, x^3), (s \vee \neg d \vee o, x^2), (s, x), (d, x), (o, x), (s \vee d, 1), (d \vee o, 1), \\ (s \vee o, 1), (s \vee d \vee o, 1+x), (s \vee \neg d, x+x^3), (s \vee o, x+x^3), (s \vee \neg d \vee o, x+x^2), \\ (\neg d \vee o, x+x^3), (s \vee o, 1+x^3), (s \vee \neg d \vee o, 1+x^2), (s \vee d \vee o, 1+x+x^3) \\ (\neg s, x^5+x^6), (d \vee o, x^6), (\neg d \vee \neg o, x^5), (\neg s \vee \neg d \vee \neg o, x^4) \\ (\neg d \vee \neg s, x^3+x^5+x^6), (\neg d \vee d \vee o, x^3+x^6), (\neg d \vee \neg d \vee \neg o, x^3+x^5), \\ (\neg d \vee \neg s \vee \neg d \vee \neg o, x^3+x^4), (s \vee o \vee \neg s, x^3+x^5+x^6), \\ (s \vee o \vee d \vee o, x^3+x^6), (s \vee o \vee \neg d \vee \neg o, x^3+x^5), \\ (s \vee o \vee \neg s \vee \neg d \vee \neg o, x^3+x^4), (s \vee \neg d \vee o \vee \neg s, x^2+x^5+x^6), \\ (s \vee \neg d \vee o \vee d \vee o, x^2+x^6), (s \vee \neg d \vee o \vee \neg d \vee \neg o, x^2+x^5), \\ (s \vee \neg d \vee o \vee \neg s \vee \neg d \vee \neg o, x^2+x^4), (s \vee \neg s, x+x^5+x^6), \\ (s \vee d \vee o, x+x^6), (s \vee \neg d \vee \neg o, x+x^5), \\ (s \vee \neg s \vee \neg d \vee \neg o, x+x^4), (d \vee \neg s, x+x^5+x^6), \\ (d \vee d \vee o, x+x^6), (d \vee \neg d \vee \neg o, x+x^5), \\ (d \vee \neg s \vee \neg d \vee \neg o, x+x^4), (o \vee \neg s, x+x^5+x^6), \\ (o \vee d \vee o, x+x^6), (o \vee \neg d \vee \neg o, x+x^5), \\ (o \vee \neg s \vee \neg d \vee \neg o, x+x^4), (s \vee d \vee \neg s, 1+x^5+x^6), \\ (s \vee d \vee d \vee o, 1+x^6), (s \vee d \vee \neg d \vee \neg o, 1+x^5), \\ (s \vee d \vee \neg s \vee \neg d \vee \neg o, 1+x^4), (d \vee o \vee \neg s, 1+x^5+x^6), \\ (d \vee o \vee d \vee o, 1+x^6), (d \vee o \vee \neg d \vee \neg o, 1+x^5), \\ (d \vee o \vee \neg s \vee \neg d \vee \neg o, 1+x^4), (s \vee o \vee \neg s, 1+x^5+x^6), \\ (s \vee o \vee d \vee o, 1+x^6), (s \vee o \vee \neg d \vee \neg o, 1+x^5), \\ (s \vee o \vee \neg s \vee \neg d \vee \neg o, 1+x^4), (s \vee d \vee o \vee \neg s, 1+x+x^5+x^6), \\ (s \vee d \vee o \vee d \vee o, 1+x+x^6), (s \vee d \vee o \vee \neg d \vee \neg o, 1+x+x^5), \\ (s \vee d \vee o \vee \neg s \vee \neg d \vee \neg o, 1+x+x^4), (s \vee \neg d \vee \neg s, x+x^3+x^5+x^6), \\ (s \vee \neg d \vee d \vee o, x+x^3+x^6), (s \vee \neg d \vee \neg d \vee \neg o, x+x^3+x^5), \\ (s \vee \neg d \vee \neg s \vee \neg d \vee \neg o, x+x^3+x^4), (s \vee o \vee \neg s, x+x^3+x^5+x^6), \\ (s \vee o \vee d \vee o, x+x^3+x^6), (s \vee o \vee \neg d \vee \neg o, x+x^3+x^5), \\ (s \vee o \vee \neg s \vee \neg d \vee \neg o, x+x^3+x^4), (s \vee \neg d \vee o \vee \neg s, x+x^2+x^5+x^6), \\ (s \vee \neg d \vee o \vee d \vee o, x+x^2+x^6), (s \vee \neg d \vee o \vee \neg d \vee \neg o, x+x^2+x^5), \\ (s \vee \neg d \vee o \vee \neg s \vee \neg d \vee \neg o, x+x^2+x^4), (\neg d \vee o \vee \neg s, x+x^3+x^5+x^6), \\ (\neg d \vee o \vee d \vee o, x+x^3+x^6), (\neg d \vee o \vee \neg d \vee \neg o, x+x^3+x^5), \\ (\neg d \vee o \vee \neg s \vee \neg d \vee \neg o, x+x^3+x^4), (s \vee o \vee \neg s, 1+x^3+x^5+x^6), \\ (s \vee o \vee d \vee o, 1+x^3+x^6), (s \vee o \vee \neg d \vee \neg o, 1+x^3+x^5), \\ (s \vee o \vee \neg s \vee \neg d \vee \neg o, 1+x^3+x^4), (s \vee \neg d \vee o \vee \neg s, 1+x^2+x^5+x^6), \\ (s \vee \neg d \vee o \vee d \vee o, 1+x^2+x^6), (s \vee \neg d \vee o \vee \neg d \vee \neg o, 1+x^2+x^5), \\ (s \vee \neg d \vee o \vee \neg s \vee \neg d \vee \neg o, 1+x^2+x^4), (s \vee d \vee o \vee \neg s, 1+x+x^3+x^5+x^6), \\ (s \vee d \vee o \vee d \vee o, 1+x+x^3+x^6), (s \vee d \vee o \vee \neg d \vee \neg o, 1+x+x^3+x^5), \\ (s \vee d \vee o \vee \neg s \vee \neg d \vee \neg o, 1+x+x^3+x^4), \}$$

Ce qui donne après simplification :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \Sigma_3 = \{ & (\neg d, x^3), (s \vee o, x^3), (s \vee \neg d \vee o, x^2), (s, x), (d, x), (o, x), (s \vee d, 1), \\ & (d \vee o, 1), (s \vee o, 1), (s \vee d \vee o, 1+x), (s \vee \neg d, x+x^3), (s \vee o, x+x^3), \\ & (s \vee \neg d \vee o, x+x^2), (\neg d \vee o, x+x^3), (s \vee o, 1+x^3), (s \vee \neg d \vee o, 1+x^2), \\ & (s \vee d \vee o, 1+x+x^3), (\neg s, x^5+x^6), (d \vee o, x^6), (\neg d \vee \neg o, x^5), (\neg s \vee \neg d \vee \neg o, x^4), \\ & (\neg s \vee \neg d, x^3+x^5+x^6), (\neg d \vee \neg o, x^3+x^5), (\neg s \vee o, x+x^5+x^6), \\ & (\neg s \vee d, x+x^5+x^6), (d \vee o, x+x^6), (d \vee o, 1+x^6), (\neg s \vee \neg d \vee \neg o, x^3+x^4), \\ & (\neg s \vee \neg d \vee o, x+x^3+x^5+x^6), (\neg s \vee d \vee o, 1+x^5+x^6), \\ & (s \vee \neg d \vee \neg o, x+x^5), (s \vee \neg d \vee \neg o, x+x^3+x^5), \\ & (s \vee d \vee o, x^3+x^6), (s \vee d \vee o, x+x^6), \\ & (s \vee d \vee o, x+x^3+x^6), (s \vee d \vee o, 1+x^6), \\ & (s \vee d \vee o, 1+x+x^6), (s \vee d \vee o, 1+x^3+x^6), \\ & (s \vee d \vee o, 1+x+x^3+x^6), \\ & \} \end{aligned}$$

Bien qu'il soit possible de réduire encore la cardinalité de  $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \Sigma_3$  en retirant les formules sous-sommées, nous n'avons pas appliqué ici cette propriété. En effet, le retrait des formules sous-sommées est fait en utilisant un pré-ordre global sur les formules. Cependant, ce pré-ordre est dépendant de la stratégie de fusion choisie. Afin de rester le plus général possible ici, nous avons donc conservé une base de croyances stratifiée globale certes d'une plus grande cardinalité mais qui permet de mieux illustrer les exemples. Dans le cadre d'une application réelle, la stratégie de fusion est choisie le plus souvent dès le départ. L'optimisation de la cardinalité en retirant les formules sous-sommées est donc utilisable.

### 7.2.3 Fusion syntaxique et cadre réversible

La fusion d'un ensemble de bases de croyances est accomplie en suivant une stratégie. Dans le cadre de bases de croyances pondérées, une stratégie est représentée par un pré-ordre sur les formules de la base pondérée globale. Formellement :

**Définition 87** Soit  $\Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n$  une base de croyance pondérées globale et soit  $s$  une stratégie de fusion. Cette stratégie est représentée syntaxiquement par un pré-ordre sur les formules pondérées défini tel que :

$$\begin{aligned} & \forall(\phi, p_{\Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n}(\phi)), (\psi, p_{\Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n}(\psi)) \in \Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n \\ & (\phi, p_{\Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n}(\phi)) \leq_{\otimes_s} (\psi, p_{\Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n}(\psi)) \text{ ssi } p_{\Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n}(\phi) \leq_s p_{\Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n}(\psi) \end{aligned}$$

Le résultat de la fusion dans l'approche syntaxique est l'ensemble des formules pondérées de poids globaux maximaux, selon le pré-ordre global défini par la stratégie de fusion. Formellement :

**Définition 88** Soit  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$  un ensemble de bases de croyances stratifiées et soit  $s$  une stratégie de fusion. Le résultat de la fusion est une base de croyances stratifiée notée  $\Sigma_1 \otimes_s \dots \otimes_s \Sigma_n$  définie telle que :

$$\Sigma_1 \otimes_s \dots \otimes_s \Sigma_n = \{(\phi, p_{\Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n}(\phi)) \in \Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n \text{ tq } p_{\Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n}(\phi) \in \max(X, \leq_s)\}$$

Selon le choix de l'opérateur de fusion, la manière de comparer les polynômes de poids globaux change. Par exemple pour une fusion avec l'opérateur  $MAX$ , on utilise le pré-ordre  $\leq_{MAX}$  pour comparer les polynômes. L'exemple suivant illustre la fusion dans le cadre réversible de l'approche syntaxique.

**Exemple 22** Reprenons, l'exemple 21 de la page 102 et sa base de croyances stratifiée globale :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \Sigma_3 = \{ & (\neg d, x^3), (s \vee o, x^3), (s \vee \neg d \vee o, x^2), (s, x), (d, x), (o, x), (s \vee d, 1), \\ & (d \vee o, 1), (s \vee o, 1), (s \vee d \vee o, 1+x), (s \vee \neg d, x+x^3), (s \vee o, x+x^3), \\ & (s \vee \neg d \vee o, x+x^2), (\neg d \vee o, x+x^3), (s \vee o, 1+x^3), (s \vee \neg d \vee o, 1+x^2), \\ & (s \vee d \vee o, 1+x+x^3), (\neg s, x^5+x^6), (d \vee o, x^6), (\neg d \vee \neg o, x^5), (\neg s \vee \neg d \vee \neg o, x^4), \\ & (\neg s \vee \neg d, x^3+x^5+x^6), (\neg d \vee \neg o, x^3+x^5), (\neg s \vee o, x+x^5+x^6), \\ & (\neg s \vee d, x+x^5+x^6), (d \vee o, x+x^6), (d \vee o, 1+x^6), (\neg s \vee \neg d \vee \neg o, x^3+x^4), \\ & (\neg s \vee \neg d \vee o, x+x^3+x^5+x^6), (\neg s \vee d \vee o, 1+x^5+x^6), \\ & (s \vee \neg d \vee \neg o, x+x^5), (s \vee \neg d \vee \neg o, x+x^3+x^5), \\ & (s \vee d \vee o, x^3+x^6), (s \vee d \vee o, x+x^6), \\ & (s \vee d \vee o, x+x^3+x^6), (s \vee d \vee o, 1+x^6), \\ & (s \vee d \vee o, 1+x+x^6), (s \vee d \vee o, 1+x^3+x^6), \\ & (s \vee d \vee o, 1+x+x^3+x^6), \\ & \} \end{aligned}$$

Nous pouvons étudier les différentes bases de croyances stratifiées résultant de la fusion en utilisant les opérateurs classiques.

**MAX** En utilisant la stratégie MAX nous obtenons la base de croyances :

$$\Sigma_1 \otimes_{MAX} \Sigma_2 \otimes_{MAX} \Sigma_3 = \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \Sigma_3$$

En effet, toutes les formules sont maximales car dans notre cas la stratégie MAX n'est pas déterminante comme nous l'avons déjà souligné au niveau sémantique.

**SUM** Pour la stratégie FSM, la base de croyances stratifiée résultat de la fusion est :

$$\Sigma_1 \otimes_{SUM} \Sigma_2 \otimes_{SUM} \Sigma_3 = \{ (s \vee d \vee o, 1 + x + x^3 + x^6), (\neg s \vee \neg d \vee o, x + x^3 + x^5 + x^6) \}$$

La base est composée de deux formules maximales.

**WS** La stratégie basée sur la somme pondérée entraîne comme résultat syntaxique de la fusion :

$$\Sigma_1 \otimes_{WS} \Sigma_2 \otimes_{WS} \Sigma_3 = \{ (\neg s \vee \neg d \vee o, x + x^3 + x^5 + x^6) \}$$

La stratégie basée sur la somme pondérée WS permet de raffiner la stratégie SUM et ne garder plus qu'une seule formule.

**LEX** En utilisant comme stratégie de fusion LEX nous obtenons la base de croyances stratifiée :

$$\Sigma_1 \otimes_{LEX} \Sigma_2 \otimes_{LEX} \Sigma_3 = \{ (s \vee d \vee o, 1 + x + x^3 + x^6) \}$$

Cette formule disjonctive contient une formule de la base  $\Sigma_3$  qui est préférée.

**GMAX** La stratégie GMAX permet de construire la base de croyances stratifiée suivante :

$$\Sigma_1 \otimes_{GMAX} \Sigma_2 \otimes_{GMAX} \Sigma_3 = \{ (s \vee d \vee o, 1 + x + x^3 + x^6), (\neg s \vee \neg d \vee o, x + x^3 + x^5 + x^6) \}$$

A nouveaux deux formules sont maximales.

## 7.2.4 Réversibilité du processus de fusion

La réversibilité permet de retrouver les poids internes et externes pour les bases de croyances stratifiées fusionnées. Le processus de réversibilité est composé de deux phases. La première consiste à retrouver le nombre de bases fusionnées et les poids externes associés. La seconde est le calcul des poids internes à partir des poids globaux.

**Retrouver le pré-ordre externe** Le nombre de bases fusionnées est donné par le degré du polynôme de poids externe global plus un. En effet, la construction du polynôme de poids global externe définie en 85, page 101 construit un polynôme dont chaque coefficient est un poids externe. En effet :  $q_{\otimes} = \sum_{i=0}^{n-1} q_B(\Sigma_{i+1})x^i$ . A partir de ce polynôme nous retrouvons le nombre de couples fusionnés grâce au degré plus un de  $q_{\otimes}$ . Nous avons :

$$\text{card}(\mathcal{B}) = \text{deg}(q_{\otimes}) + 1;$$

Afin de retrouver le poids externe  $q_B(\Sigma_i)$  associé à chaque base  $\Sigma_i$  nous isolons le coefficient recherché. Formellement :

$$q_B(\Sigma_i) = \frac{q_{\otimes} \bmod x^i}{x^{i-1}}$$

A partir des  $q_B(\Sigma_i)$  nous retrouvons le rang absolu de chaque base  $\Sigma_i$ . Ces informations permettent de retrouver les poids internes en fonction des poids globaux.

**Retrouver les pré-ordres internes** La construction des poids globaux décale les poids internes en fonction du rang absolu afin d'avoir des supports disjoints. L'opération inverse consiste à découper le poids global en poids internes en décalant à chaque fois le polynôme par le degré maximum du support correspondant au plus grand poids interne de la base. Plus formellement, la réversibilité permet de retrouver les poids internes  $p_{\Psi_i}(\omega)$  pour chaque base de croyances stratifiée  $\Sigma_i$ . Plus formellement, pour une formule  $\psi = \phi_k \vee \dots \vee \phi_l$  issue de la disjonction des formules  $\phi_i$  provenant de façon unique d'une base  $\Sigma_i$  :

$$p_{\Sigma_i}(\phi_j) = \frac{p_{\otimes}(\psi) \bmod x^{\sum_{l=1}^{r_B(s(\phi_{j_i}))} MAX_{r_B^{-1}(l)}}}{x^{\sum_{k=1}^{r_B(s(\phi_{j_i})-1} MAX_{r_B^{-1}(k)}}}$$

L'exemple suivant illustre la réversibilité du processus de fusion.

**Exemple 23** Soit la formule  $(s \vee d \vee o, 1 + x + x^3 + x^6)$  provenant de la base de croyances stratifiée globale  $\Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n$  construite dans l'exemple 22. Le poids global externe est  $q_{\otimes} = 2 + 2x + 1x^2$ . Nous pouvons en déduire le nombre  $n$  de bases de croyances - et donc d'états épistémiques - fusionnées.

$$n = \deg(q_{\oplus}) + 1 = 2 + 1 = 3$$

L'ensemble des bases de croyances fusionnées peut être noté  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$ . Nous calculons maintenant les poids externes associés à chaque  $\Sigma_i$  en utilisant la formule :

$$q_{\mathcal{B}}(\Sigma_i) = \frac{q_{\otimes} \bmod x^i}{x^{i-1}}$$

nous avons :

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{B}}(\Sigma_1) &= \frac{q_{\otimes} \bmod x^1}{x^{1-1}} \\ &= 2 + 2x + x^2 \bmod x \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{B}}(\Sigma_2) &= \frac{2+2x+x^2 \bmod x^2}{x} \\ &= \frac{2+2x}{x} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{B}}(\Sigma_3) &= \frac{2+2x+x^2 \bmod x^3}{x^2} \\ &= \frac{2+2x+x^2}{x^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ceci permet de calculer les rangs absolus  $r_{\mathcal{B}}(\Sigma_1) = 2$ ,  $r_{\mathcal{B}}(\Sigma_2) = 3$  et  $r_{\mathcal{B}}(\Sigma_3) = 1$ .

Afin de retrouver les poids internes originaux des formules nous utilisons la formule :

$$p_{\Sigma_i}(\phi_j) = \frac{p_{\otimes}(\psi) \bmod x^{\sum_{l=1}^{r_B(s(\phi_{j_i}))} MAX_{r_B^{-1}(l)}}}{x^{\sum_{k=1}^{r_B(s(\phi_{j_i})-1} MAX_{r_B^{-1}(k)}}}$$

La réversibilité n'est utilisable que si les degrés maximum des poids internes ont été conservés. Cette hypothèse n'est pas pénalisante dans la pratique car elle n'entraîne que la conservation de  $n$  entiers. Ici les maximums conservés sont :

$$\begin{aligned} MAX_{\Sigma_1} &= \max_{\phi' \in \mathcal{W}} \deg(p_{\Sigma_1}(\phi')) + 1 = \deg(x) + 1 = 2 \\ MAX_{\Sigma_2} &= \max_{\phi' \in \mathcal{W}} \deg(p_{\Sigma_2}(\phi')) + 1 = \deg(x + x^2) + 1 = 3 \\ MAX_{\Sigma_3} &= \max_{\phi' \in \mathcal{W}} \deg(p_{\Sigma_3}(\phi')) + 1 = \deg(x) + 1 = 2 \end{aligned}$$

A partir de ces formules, il est possible de déterminer l'origine de la formule  $(s \vee d \vee o, 1 + x + x^3 + x^6)$ . Nous calculons un poids interne dans chaque base de croyance  $\Sigma_i$  afin de déterminer si une formule de  $\Sigma_i$  entre dans la composition de cette disjonction et quel est son poids original.

$$\begin{aligned}
 p_{\Sigma_1}(s \vee d \vee o) &= \frac{p_{\otimes}(s \vee d \vee o) \bmod x^{MAX_{\Sigma_3} + MAX_{\Sigma_1}}}{x^{MAX_{\Sigma_3}}} \\
 &= \frac{p_{\otimes}(s \vee d \vee o) \bmod x^{2+2}}{x^2} \\
 &= \frac{p_{\otimes}(s \vee d \vee o) \bmod x^4}{x^2} \\
 &= \frac{1+x+x^3+x^6 \bmod x^4}{x^2} \\
 &= x \\
 \\
 p_{\Sigma_2}(s \vee d \vee o) &= \frac{p_{\otimes}(s \vee d \vee o) \bmod x^{MAX_{\Sigma_3} + MAX_{\Sigma_1} + MAX_{\Sigma_2}}}{x^{MAX_{\Sigma_3} + MAX_{\Sigma_1}}} \\
 &= \frac{p_{\otimes}(s \vee d \vee o) \bmod x^{2+2+3}}{x^{2+2}} \\
 &= \frac{p_{\otimes}(s \vee d \vee o) \bmod x^7}{x^4} \\
 &= \frac{1+x+x^3+x^6 \bmod x^7}{x^4} \\
 &= x^2 \\
 \\
 p_{\Sigma_3}(s \vee d \vee o) &= \frac{p_{\otimes}(s \vee d \vee o) \bmod x^{MAX_{\Sigma_3}}}{x^0} \\
 &= \frac{p_{\otimes}(s \vee d \vee o) \bmod x^2}{x^0} \\
 &= p_{\otimes}(s \vee d \vee o) \bmod x^2 \\
 &= 1+x+x^3+x^6 \bmod x^2 \\
 &= 1+x
 \end{aligned}$$

La formule  $(s \vee d \vee o, 1+x+x^3+x^6)$  provient de la disjonction de 3 formules  $(\phi, x)$ ,  $(\psi, x^2)$  et  $\gamma, 1+x$  provenant respectivement de  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_3$ . D'après la composition de ces bases, nous en déduisons que ces trois formules sont respectivement :  $(s \vee o, x) \in \Sigma_1$ ,  $(s \vee o, x^2) \in \Sigma_2$  et  $(s \vee d \vee o, 1+x) \in \Sigma_3$

### 7.3 Équivalence des approches

Nous montrons maintenant l'équivalence des approches sémantique et syntaxique dans le cadre réversible. Pour cela, nous nous basons sur l'équivalence entre les représentations sémantique et syntaxique d'état épistémiques étudiée en 6.5, page 72. Cette équivalence est basée sur la fonction  $\kappa$ , définie en 70 et dont nous rappelons la définition :

#### Rappel 8

$$\begin{aligned}
 \forall \omega \in \mathcal{W}, \\
 \kappa_{\Sigma_i}(\omega) &= \max(\{p_{\Sigma_i}(\phi), (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i \text{ et } \omega \not\models \phi\})
 \end{aligned}$$

Nous nous plaçons dans le cadre où un ensemble d'état épistémiques  $\Psi = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}$  est représenté sémantiquement par un ensemble de couple  $\mathcal{C} = \{(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_1}), \dots, (\mathcal{W}, \leq_{\Psi_n})\}$  dont l'ensemble des bases propositionnelles exprimant les croyances observables est  $E = \{K_1, \dots, K_n\}$ . La représentation syntaxique de l'ensemble d'états épistémiques  $\Psi$  est un ensemble de bases de croyances pondérées  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$  tel que à chaque couple  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$  correspond une base de croyances stratifiée  $\Sigma_i$  équivalente. Soit formellement :

$$1 \leq i \leq n, \forall \omega \in \mathcal{W}, \kappa_{\Sigma_i}(\omega) = p_{\Psi_i}(\omega)$$

Les fonctions de pondérations  $p_{\Psi_i}$  et  $p_{\Sigma_i}$  sont des fonctions à valeur dans l'ensemble  $V[x]$  des polynômes à coefficients dans  $V$ . L'ensemble  $V[x]$  étant pré-ordonné totalement par une relation d'ordre  $\leq_p$  et admettant un élément minimal pour  $\leq_p$ .

L'existence de l'ensemble  $\mathcal{B}$  est démontrée par la proposition 17 page 17.

Nous montrons maintenant que la fusion d'un ensemble de couples  $\mathcal{C} = \{(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_1}), \dots, (\mathcal{W}, \leq_{\Psi_n})\}$  dans le cadre réversible est équivalente à la fusion d'un ensemble  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$  de bases de croyances stratifiées, avec  $\mathcal{B}$  équivalent à  $\mathcal{C}$ , quelque soit l'opérateur de fusion  $p$  choisi.

**Proposition 19** Soit  $\Psi = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}$  un ensemble d'états épistémiques. Soit  $\mathcal{C} = \{(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_1}), \dots, (\mathcal{W}, \leq_{\Psi_n})\}$  la représentation sémantique de  $\Psi$  et Soit  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$  une représentation

syntactique de  $\Psi$  telle que  $\mathcal{C}$  est équivalent à  $\mathcal{B}$ . Pour une stratégie de fusion  $s$ , la représentation sémantique  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_1 \oplus_s \dots \oplus_s \Psi_n})$  et la représentation syntaxique  $\Sigma_1 \otimes_s \dots \otimes_s \Sigma_n$  la fusion des états épistémiques de  $\Psi$  selon la stratégie  $s$  sont équivalentes. C'est à dire :

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \mathcal{W}, \\ \kappa_{\Sigma_1 \otimes_s \dots \otimes_s \Sigma_n}(\omega) = p_{\Psi_1 \oplus_s \dots \oplus_s \Psi_n}(\omega) \end{aligned}$$

**Preuve 5** Avant de commencer la démonstration de la proposition 19 nous rappelons la notion d'équivalence, définie en 72, page 81.

Si deux ensembles  $\mathcal{C} = \{(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_1}), \dots, (\mathcal{W}, \leq_{\Psi_n})\}$  et  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$  sont équivalents, alors nous avons :

$$\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n, \forall \omega \in \mathcal{W}, \kappa_{\Sigma_i}(\omega) = p_{\Psi_i}(\omega)$$

et

$$\forall i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n, q_{\mathcal{C}}((\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})) = q_{\mathcal{B}}(\Sigma_i)$$

Nous rappelons également que si  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_1 \oplus_s \dots \oplus_s \Psi_n})$  représente sémantiquement la fusion des états épistémiques de  $\Psi$ , selon la définition 76 de la page 92, les poids globaux sur lesquels le pré-ordre  $\leq_{\Psi_1 \oplus_s \dots \oplus_s \Psi_n}$  est basé sont tels que :

$$p_{\Psi_1 \oplus_s \dots \oplus_s \Psi_n}(\omega) = \sum_{i=1}^n p_{\Psi_i}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_{\mathcal{C}}(\xi_i)-1} MAX_{r^{-1}(j)}}$$

avec

$$MAX_{r_{\mathcal{C}}^{-1}(j)} = \max_{\omega' \in \mathcal{W}} (deg(p_{r_{\mathcal{C}}^{-1}(j)}(\omega')) + 1)$$

De manière similaire, si la base de croyance stratifiée  $\Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n$  est la base globale utilisée pour la fusion des états épistémiques de  $\Psi$ , selon la définition 85 de la page 101, les poids globaux des formules  $(\phi, p_{\Sigma_1 \otimes_s \dots \otimes_s \Sigma_n}(\phi))$  de  $\Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n$  sont tels que :

$$p_{\Sigma_1 \otimes_s \dots \otimes_s \Sigma_n}(\phi) = \sum_{i=1}^k p_{s(\phi_{j_i})}(\phi_{j_i}) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(s(\phi_{j_i}))-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}}$$

avec

$$MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)} = \max_{\phi' \in \Sigma_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} (deg(p_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}(\phi')) + 1)$$

Avant de commencer la démonstration de la proposition 19, nous démontrons en préliminaire certaines propriétés sur le calculs des poids globaux induites par l'équivalence de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{B}$

**Préliminaires** Certaines propriétés simples à démontrer sont nécessaires pour démontrer la proposition 19. Nous présentons ici la liste de ces propriétés.

1. Les rangs absolus des éléments de  $\mathcal{C}$  et des éléments de  $\mathcal{B}$  sont égaux. Formellement :

$$1 \leq i \leq n, r_{\mathcal{C}}(\xi_i) = r_{\mathcal{B}}(\Sigma_i)$$

Cette propriété découle directement de la définition de l'équivalence entre  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{B}$

2. Pour une base de croyances stratifiée  $\Sigma_i$  équivalente au couple  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_i})$ , le maximum des degrés des polynômes  $p_{\Sigma_i}$  attachés aux formules de  $\Sigma_i$  est égal au maximum des degrés des polynômes  $p_{\Psi_i}$  attachés aux interprétations de  $\mathcal{W}$ . En effet, d'après la définition de la fonction  $\kappa$  :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, \kappa_{\Sigma_i}(\omega) = \max(\{s_{\Sigma_i}(\phi) \text{ tq } (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i \text{ et } \omega \models \phi\})$$

En utilisant cette fonction dans le calcul des maximums des degrés des polynômes globaux pour les représentations sémantiques et syntaxiques nous avons :

$$\begin{aligned} MAX_{\xi_i} &= \max_{\omega' \in \mathcal{W}} (deg(p_{\Psi_i}(\omega')) + 1) \\ &= \max_{\omega' \in \mathcal{W}} (deg(\kappa_{\Sigma_i}(\omega')) + 1) \\ &= \max_{\phi' \in \Sigma_i, \omega' \models \phi'} (deg(p_{\Sigma_i}(\phi')) + 1) \\ &= \max_{\phi' \in \Sigma_i} (deg(p_{\Sigma_i}(\phi')) + 1) \\ &\quad \text{car toute formule } \phi' \text{ est falsifiée par au moins un } \omega' \\ &= MAX_{\Sigma_i} \end{aligned}$$



Nous démontrons maintenant par récurrence la proposition 19. C'est à dire :

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \mathcal{W}, \\ \kappa_{\Sigma_1 \otimes_s \dots \otimes_s \Sigma_n}(\omega) &= p_{\Psi_1 \oplus \dots \oplus \Psi_n}(\omega) \end{aligned}$$

**Pour  $n = 2$**  Si la fusion selon une stratégie  $s$  est effectuée à partir deux états épistémiques. Dans la représentation sémantique la fonction de pondération est définie par :

$$p_{\Psi_1 \oplus \Psi_2}(\omega) = p_{\Psi_1}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_1)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} + p_{\Psi_2}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_2)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}}$$

avec

$$MAX_{r_C^{-1}(j)} = \max_{\omega' \in \mathcal{W}} (deg(p_{r_C^{-1}(j)}(\omega')) + 1)$$

Soit  $\omega$  une interprétation de  $\mathcal{W}$ . Deux cas sont possibles :

**i**  $\omega \models \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ . D'après la construction de la base  $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ , si  $\omega \models \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$  alors  $\omega \models \Sigma_1$  et  $\omega \models \Sigma_2$ . On a donc  $\kappa_{\Sigma_1}(\omega) = 0$  et  $\kappa_{\Sigma_2}(\omega) = 0$ . Par hypothèse, les bases  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont respectivement équivalentes aux couples  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_1})$  et  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_2})$ . Nous avons donc  $\kappa_{\Sigma_1}(\omega) = 0 = p_{\Psi_1}(\omega)$  et  $\kappa_{\Sigma_2}(\omega) = 0 = p_{\Psi_2}(\omega)$ . Le calcul du poids global pour l'interprétation  $\omega$  s'écrit :

$$\begin{aligned} p_{\Psi_1 \oplus \Psi_2}(\omega) &= p_{\Psi_1}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_1)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} + p_{\Psi_2}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_2)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} \\ &= \kappa_{\Sigma_1}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_1)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} + \kappa_{\Sigma_2}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_2)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} \\ &= 0 x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_1)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} + 0 x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_2)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} \\ &= 0 = \kappa_{\Sigma_1 \otimes_s \Sigma_2}(\omega) \end{aligned}$$

**ii**  $\omega \not\models \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ . Notons  $F$  l'ensemble des formules de  $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$  falsifiées par  $\omega$ . Formellement :

$$F = \{(\phi, p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi)) \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \text{ tq } \omega \not\models \phi\}$$

Comme par hypothèse  $\omega \not\models \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ , l'ensemble  $F$  n'est pas vide. Notons maintenant  $F^{max}$  l'ensemble des formules de  $F$  de poids maximal suivant  $\leq_s$  :

$$F^{max} = \{(\phi, p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi)) \in F \text{ tq } \forall (\phi', p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi')) \in F, p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi') \leq_s p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi)\}$$

L'ensemble  $F^{max}$  existe et n'est pas vide car le pré-ordre  $\leq_s$  est total. Trois cas se présentent :

–  $\omega \not\models \Sigma_1$  et  $\omega \models \Sigma_2$ . Dans ce cas, l'ensemble des formules de  $\Sigma_1 \otimes_s \Sigma_2$  falsifiées par  $\omega$  est composé uniquement de formules provenant de  $\Sigma_1$  attachées à un poids global, c'est à dire :

$$F = \{(\phi, p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi)) \in \Sigma_1 \otimes_s \Sigma_2 \text{ tq } \omega \not\models \phi \text{ et } (\phi, p_{\Sigma_1}(\phi)) \in \Sigma_1\}$$

L'ensemble  $F^{max}$  contient les formules de  $F$  dont le poids est maximal. On a donc :

$$\kappa_{\Sigma_1 \otimes_s \Sigma_2}(\omega) = p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi)$$

Le calcul du poids global  $p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi)$  attaché à  $\phi$  est tel que :

$$\begin{aligned} p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi) &= p_{\Sigma_1}(\phi) \times x^{\sum_{m=1}^{r_B(\Sigma_1)-1} MAX_{r_B(m)}} \\ &= \kappa_{\Sigma_1}(\omega) \times x^{\sum_{m=1}^{r_B(\Sigma_1)-1} MAX_{r_B(m)}} \\ &\text{car } \phi \text{ et de poids maximal et que } \omega \not\models \phi \end{aligned}$$

Par hypothèse, les bases de croyances  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  étant respectivement équivalentes aux couples  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_1})$  et  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_2})$ , nous avons que :

$$\kappa_{\Sigma_i}(\omega) = p_{\Sigma_i}(\phi)$$

La construction du poids global est telle que :

$$\begin{aligned}
 p_{\Psi_1 \oplus \Psi_2}(\omega) &= p_{\Psi_1}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_1)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} + p_{\Psi_2}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_2)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} \\
 &= \kappa_{\Sigma_1}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_1)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} + \kappa_{\Sigma_2}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_2)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} \\
 &= \kappa_{\Sigma_1}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_1)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} + 0 x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_2)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} \\
 &\quad (\text{car } \omega \models \Sigma_2) \\
 &= \kappa_{\Sigma_1}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_1)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} \\
 &= \kappa_{\Sigma_1}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_B(\Sigma_1)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} \\
 &\quad (\text{d'après la propriété 1, } 1 \leq i \leq n, r_C(\xi_i) = r_B(\Sigma_i)) \\
 &= \kappa_{\Sigma_1}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_B(\Sigma_1)-1} MAX_{r_B^{-1}(j)}} \\
 &\quad (\text{d'après la propriété 2}) \\
 &= p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi) \\
 &= \kappa_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\omega) \\
 &\quad (\text{car } p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi) \text{ est maximal})
 \end{aligned}$$

Nous vérifions donc bien :

$$p_{\Psi_1 \oplus \Psi_2}(\omega) = \kappa_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\omega)$$

- $\omega \models \Sigma_1$  et  $\omega \not\models \Sigma_2$ . Ce cas est symétrique au précédent. la formule  $\psi$  mais aussi la formule  $\phi \vee \psi$  ne sont pas falsifiées. L'ensemble des formules de  $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$  falsifiées par  $\omega$  est composé uniquement de formules provenant de  $\Sigma_2$  attachées à un poids global, c'est à dire :

$$F = \{(\phi, p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi)) \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \text{ tq } \omega \not\models \phi \text{ et } (\phi, p_{\Sigma_2}(\phi)) \in \Sigma_2\}$$

L'ensemble  $F^{max}$  contient les formules de  $F$  dont le poids est maximal. On a donc :

$$\kappa_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\omega) = p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi)$$

Le calcul du poids global  $p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi)$  attaché à  $\phi$  est tel que :

$$\begin{aligned}
 p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi) &= p_{\Sigma_2}(\phi) \times x^{\sum_{m=1}^{r_B(\Sigma_2)-1} MAX_{r_B^{-1}(m)}} \\
 &= \kappa_{\Sigma_2}(\omega) \times x^{\sum_{m=1}^{r_B(\Sigma_2)-1} MAX_{r_B^{-1}(m)}} \\
 &\quad \text{car } \phi \text{ et de poids maximal et que } \omega \not\models \phi
 \end{aligned}$$

Par hypothèse, les bases de croyances  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  étant respectivement équivalentes aux couples  $\mathcal{W}, \leq_{\Psi_1}$  et  $\mathcal{W}, \leq_{\Psi_2}$ , nous avons que :

$$\kappa_{\Sigma_i}(\omega) = p_{\Sigma_i}(\phi)$$

La construction du poids global est telle que :

$$\begin{aligned}
 p_{\Psi_1 \oplus \Psi_2}(\omega) &= p_{\Psi_1}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_1)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} + p_{\Psi_2}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_2)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} \\
 &= \kappa_{\Sigma_1}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_1)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} + \kappa_{\Sigma_2}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_2)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} \\
 &= 0 + \kappa_{\Sigma_2}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_2)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} \\
 &\quad (\text{car } \omega \models \Sigma_1) \\
 &= \kappa_{\Sigma_2}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_C(\xi_2)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} \\
 &= \kappa_{\Sigma_2}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_B(\Sigma_2)-1} MAX_{r_C^{-1}(j)}} \\
 &\quad (\text{d'après la propriété 1, } 1 \leq i \leq n, r_C(\xi_i) = r_B(\Sigma_i)) \\
 &= \kappa_{\Sigma_2}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_B(\Sigma_2)-1} MAX_{r_B^{-1}(j)}} \\
 &\quad (\text{d'après la propriété 2}) \\
 &= p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi) \\
 &= \kappa_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\omega) \\
 &\quad (\text{car } p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi) \text{ est maximal})
 \end{aligned}$$

Nous vérifions donc bien :

$$p_{\Psi_1 \oplus \Psi_2}(\omega) = \kappa_{\Sigma_1 \otimes_s \Sigma_2}(\omega)$$

–  $\omega \not\models \phi$  et  $\omega \not\models \psi$ . Dans ce cas, les trois formules  $\phi$ ,  $\psi$  mais aussi  $\phi \vee \psi$  sont falsifiées. D'après la construction de la base de croyance fusionnée, la formule  $(\phi \vee \psi, p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi \vee \psi))$  est la formule de poids maximal. De plus :

$$p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi \vee \psi) = p_{\Sigma_1}(\phi) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(\Sigma_1)-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} + p_{\Sigma_2}(\psi) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(\Sigma_2)-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}}$$

avec

$$MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)} = \max_{\phi' \in \Sigma_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} (deg(p_{\Sigma_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}}(\phi')) + 1)$$

Les ensembles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{B}$  étant équivalents, nous avons  $p_{\Sigma_1}(\phi) = p_{\Psi_1}(\omega)$  et  $p_{\Sigma_2}(\psi) = p_{\Psi_2}(\omega)$ . Nous pouvons alors écrire :

$$p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi \vee \psi) = p_{\Psi_1}(\omega) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(\Sigma_1)-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} + p_{\Psi_2}(\omega) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(\Sigma_2)-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}}$$

avec

$$MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)} = \max_{\phi' \in \Sigma_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} (deg(p_{\Sigma_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}}(\phi')) + 1)$$

D'après la première propriété énoncée dans les préliminaires nous avons que :

$$1 \leq i \leq n, r_{\mathcal{C}}(\xi_i) = r_{\mathcal{B}}(\Sigma_i)$$

Ceci nous permet d'écrire :

$$p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi \vee \psi) = p_{\Psi_1}(\omega) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{C}}(\xi_1)-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} + p_{\Psi_2}(\omega) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{C}}(\xi_2)-1} MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}}$$

avec

$$MAX_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)} = \max_{\phi' \in \Sigma_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}} (deg(p_{\Sigma_{r_{\mathcal{B}}^{-1}(m)}}(\phi')) + 1)$$

La fonction inverse de rang absolu fait correspondre à un entier  $i$  la base de croyance stratifiée  $\Sigma_j$  située au rang  $j$  dans le pré-ordre absolu. La propriété 1 des préliminaires indique que cette base  $\Sigma_j$  est équivalente au couplé  $(\mathcal{W}, \leq_{\Psi_j})$ . De plus, d'après la propriété 2 des préliminaires, nous avons :

$$MAX_{\xi_i} = MAX_{\Sigma_i}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\phi \vee \psi) = p_{\Psi_1}(\omega) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{C}}(\xi_1)-1} MAX_{r_{\mathcal{C}}^{-1}(m)}} + p_{\Psi_2}(\omega) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{C}}(\xi_2)-1} MAX_{r_{\mathcal{C}}^{-1}(m)}}$$

avec

$$MAX_{r_{\mathcal{C}}^{-1}(m)} = \max_{\omega \in (\mathcal{W}, \leq_{r_{\mathcal{C}}^{-1}(m)}} (deg(p_{\Psi_{r_{\mathcal{C}}^{-1}(m)}}(\omega)) + 1)$$

On a donc bien :

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \mathcal{W}, \\ \kappa_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2}(\omega) &= p_{\Psi_1 \oplus \Psi_2}(\omega) \end{aligned}$$

**Pour  $n = n+1$**  La construction de la base pondérée globale est associative et commutative. Si  $\Sigma_i$  et  $\Sigma_j$  sont deux bases de croyances stratifiées, nous avons :

$$\Sigma_i \otimes \Sigma_j = \Sigma_j \otimes \Sigma_i$$

De plus, si  $\Sigma_k$  est une troisième base, nous avons :

$$\Sigma_i \otimes \Sigma_j \otimes \Sigma_k = (\Sigma_i \otimes \Sigma_j) \otimes \Sigma_k = \Sigma_i \otimes (\Sigma_j \otimes \Sigma_k)$$

Nous pouvons écrire la fusion de  $n$  bases de croyances stratifiées comme la fusion du résultat des  $n - 1$  premières bases avec la base  $n$ . Ceci revient à fusionner 2 bases de croyances. Formellement :

$$\Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_n = (\Sigma_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma_{n-1}) \otimes \Sigma_n$$

Nous avons démontré l'équivalence entre la fusion dans l'approche syntaxique pour deux bases de croyances stratifiées. D'après la propriété que nous venons d'énoncer, l'équivalence est démontrée au rang  $n$ .  $\square$

L'exemple suivant illustre l'équivalence entre la fusion au niveau sémantique et la fusion au niveau syntaxique.

**Exemple 24** Nous reprenons ici les exemples 18 de la page 95 et 22 de la page 105. Ces deux exemples montre respectivement les aspects sémantique et syntaxique de la fusion d'un ensemble de 3 états épistémiques  $\Psi = \{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ .

Dans l'approche sémantique,  $\Psi$  est représenté par un ensemble de couples  $\mathcal{C} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  tel que :

$\omega$	$p_{\Psi_1}(\omega)$	$p_{\Psi_2}(\omega)$	$p_{\Psi_3}(\omega)$	$p_{\oplus}(\omega)$
$\omega_0$	$x$	$x^2$	$1 + x$	$1 + x + x^3 + x^6$
$\omega_1$	0	0	1	1
$\omega_2$	1	0	1	$1 + x^2$
$\omega_3$	$x$	$x$	$x$	$x + x^3 + x^5$
$\omega_4$	0	$x + x^2$	1	$1 + x^5 + x^6$
$\omega_5$	0	$x + x^2$	$x$	$x + x^5 + x^6$
$\omega_6$	$x$	$x + x^2$	$x$	$x + x^3 + x^5 + x^6$
$\omega_7$	$x$	1	0	$x^3 + x^4$

A chaque couple  $\xi_i$  de  $\mathcal{C}$  correspond un pré-ordre sur les interprétations représenté par des polynômes.

Dans l'approche syntaxique,  $\Psi$  est représenté par un ensemble de bases de croyances stratifiées  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$ . Chaque base est composée de formules pondérées, formellement :

$$\Sigma_1 = \{(\neg d, x), (s \vee o, x), (s \vee \neg d \vee o, 1)\}$$

$$\Sigma_2 = \{(\neg s, x + x^2), (d \vee o, x^2), (\neg d \vee \neg o, x), (\neg s \vee \neg d \vee \neg o, 1)\}$$

$$\Sigma_3 = \{(s, x), (d, x), (o, x), (s \vee d, 1), (d \vee o, 1), (s \vee o, 1), (s \vee d \vee o, 1 + x)\}$$

Avant d'aller plus loin, l'ensemble de couples  $\mathcal{C}$  doit être équivalent à l'ensemble de bases de croyances stratifiées  $\mathcal{B}$ . L'équivalence entre un couple  $\xi_i$  représentant sémantiquement un état épistémique  $\Psi_i$  et une base de croyances stratifiée  $\Sigma_i$  est donnée par la définition 70, page 72 que nous rappelons :

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, \kappa_{\Sigma_i}(\omega) = \max(\{p_{\Sigma_i}(\phi), (\phi, p_{\Sigma_i}(\phi)) \in \Sigma_i \text{ et } \omega \not\models \phi\})$$

Nous avons montré dans l'exemple 13 page 82 que les ensembles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{B}$  sont bien équivalents. D'après la proposition 19 page 108, le résultat de la fusion des couples de  $\mathcal{C}$  doit être équivalent au résultat de la fusion de l'ensemble bases de croyances stratifiées équivalentes  $\mathcal{B}$ . La fusion au niveau sémantique repose sur le calcul du poids global de chaque interprétation rappelée ici :

$\omega$	$rk_{MAX}(\omega)$	$rk_{SUM}(\omega)$	$rk_{WS}(\omega)$	$w_{LEX}(\omega)$	$rk_{GMAX}(\omega)$
$\omega_0$	1	4	5	8	4
$\omega_1$	1	1	1	5	1
$\omega_2$	1	2	2	7	2
$\omega_3$	1	3	5	3	3
$\omega_4$	1	3	4	6	3
$\omega_5$	1	3	4	2	3
$\omega_6$	1	4	6	4	4
$\omega_7$	1	2	3	1	2

A partir des poids globaux et des stratégies de fusions nous pouvons construire les pré-ordres globaux :

$$\leq_{MAX}: \omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \omega_6 = \omega_7$$

$$\leq_{SUM}: \omega_1 < \omega_2 = \omega_7 < \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 < \omega_0 = \omega_6$$

$$\leq_{WS}: \omega_1 < \omega_2 < \omega_7 < \omega_4 = \omega_5 < \omega_0 = \omega_3 < \omega_6$$

$$\leq_{LEX}: \omega_7 < \omega_5 < \omega_3 < \omega_6 < \omega_1 < \omega_4 < \omega_2 < \omega_0$$

$$\leq_{GMAX}: \omega_1 < \omega_2 = \omega_7 < \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 < \omega_0 = \omega_6$$

Le résultat de la fusion est représenté sémantiquement par l'ensemble des interprétations minimales dans le pré-ordre global choisi. Pour chaque stratégie de fusion les résultats sont donc :

$$Mod(Bel(\Psi_{\oplus MAX})) = \mathcal{W}$$

$$Mod(Bel(\Psi_{\oplus SUM})) = \{\omega_1\}$$

$$Mod(Bel(\Psi_{\oplus WS})) = \{\omega_1\}$$

$$Mod(Bel(\Psi_{\oplus LEX})) = \{\omega_7\}$$

$$Mod(Bel(\Psi_{\oplus GMAX})) = \{\omega_1\}$$

Au niveau syntaxique, la fusion repose sur la construction d'une base de croyances stratifiée globale que nous rappelons ici (pour les détails sur la fusion syntaxique voir l'exemple 22 page 105)

$$\begin{aligned} \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \Sigma_3 = \{ & (\neg d, x^3), (s \vee o, x^3), (s \vee \neg d \vee o, x^2), (s, x), (d, x), (o, x), (s \vee d, 1), \\ & (d \vee o, 1), (s \vee o, 1), (s \vee d \vee o, 1 + x), (s \vee \neg d, x + x^3), (s \vee o, x + x^3), \\ & (s \vee \neg d \vee o, x + x^2), (\neg d \vee o, x + x^3), (s \vee o, 1 + x^3), (s \vee \neg d \vee o, 1 + x^2), \\ & (s \vee d \vee o, 1 + x + x^3), (\neg s, x^5 + x^6), (d \vee o, x^6), (\neg d \vee \neg o, x^5), (\neg s \vee \neg d \vee \neg o, x^4), \\ & (\neg s \vee \neg d, x^3 + x^5 + x^6), (\neg d \vee \neg o, x^3 + x^5), (\neg s \vee o, x + x^5 + x^6), \\ & (\neg s \vee d, x + x^5 + x^6), (d \vee o, x + x^6), (d \vee o, 1 + x^6), (\neg s \vee \neg d \vee \neg o, x^3 + x^4), \\ & (\neg s \vee \neg d \vee o, x + x^3 + x^5 + x^6), (\neg s \vee d \vee o, 1 + x^5 + x^6), \\ & (s \vee \neg d \vee \neg o, x + x^5), (s \vee \neg d \vee \neg o, x + x^3 + x^5), \\ & (s \vee d \vee o, x^3 + x^6), (s \vee d \vee o, x + x^6), \\ & (s \vee d \vee o, x + x^3 + x^6), (s \vee d \vee o, 1 + x^6), \\ & (s \vee d \vee o, 1 + x + x^6), (s \vee d \vee o, 1 + x^3 + x^6), \\ & (s \vee d \vee o, 1 + x + x^3 + x^6), \\ & \} \end{aligned}$$

Les résultats de la fusion selon les différentes stratégies sont :

$$\Sigma_1 \otimes_{MAX} \Sigma_2 \otimes_{MAX} \Sigma_3 = \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \Sigma_3$$

$$\Sigma_1 \otimes_{SUM} \Sigma_2 \otimes_{SUM} \Sigma_3 = \{ (s \vee d \vee o, 1 + x + x^3 + x^6), (\neg s \vee \neg d \vee o, x + x^3 + x^5 + x^6) \}$$

$$\Sigma_1 \otimes_{WS} \Sigma_2 \otimes_{WS} \Sigma_3 = \{ (\neg s \vee \neg d \vee o, x + x^3 + x^5 + x^6) \}$$

$$\Sigma_1 \otimes_{LEX} \Sigma_2 \otimes_{LEX} \Sigma_3 = \{ (s \vee d \vee o, 1 + x + x^3 + x^6) \}$$

$$\Sigma_1 \otimes_{GMAX} \Sigma_2 \otimes_{GMAX} \Sigma_3 = \{ (s \vee d \vee o, 1 + x + x^3 + x^6), (\neg s \vee \neg d \vee o, x + x^3 + x^5 + x^6) \}$$

*La fusion basée sur MAX n'étant pas adapté à la fusion dans le cadre réversible dont les poids sont des polynômes à coefficient dans  $\mathbb{F}_2$ , nous ne détaillons pas ici l'équivalence. Le résultat de la fusion étant en effet l'ensemble des interprétations.*

*Pour la fusion basée sur la stratégie SUM :*

$$\kappa_{\Sigma_1 \otimes_{LEX} \Sigma_2 \otimes_{LEX} \Sigma_3}(\omega_1) = p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \Sigma_3}(s \vee d) = 1$$

*Pour la fusion basée sur la stratégie WS :*

$$\kappa_{\Sigma_1 \otimes_{LEX} \Sigma_2 \otimes_{LEX} \Sigma_3}(\omega_1) = p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \Sigma_3}(s \vee d) = 1$$

*Pour la fusion basée sur la stratégie LEX, nous avons que :*

$$\kappa_{\Sigma_1 \otimes_{LEX} \Sigma_2 \otimes_{LEX} \Sigma_3}(\omega_7) = p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \Sigma_3}(s \vee d \vee o) = 1 + x + x^3 + x^6$$

*Pour la fusion suivant la stratégie GMAX la fonction  $\kappa$  est telle que :*

$$\kappa_{\Sigma_1 \otimes_{LEX} \Sigma_2 \otimes_{LEX} \Sigma_3}(\omega_6) = p_{\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \Sigma_3}(\neg s \vee d \vee o) = x + x^3 + x^5 + x^6$$

*Nous n'avons calculé la valeur de la fonction  $\kappa$  que pour les interprétations faisant parties des résultats de la fusion, cependant, à partir de la base de croyances stratifiée globale il est possible de calculer l'ensemble des valeurs des fonctions  $\kappa$  pour toute les stratégies  $s$ .*



## Chapitre 8

# Generalisation de la fusion dans le cadre réversible

### Contents

---

<b>8.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>118</b>
<b>8.2</b>	<b>Fusion à base de distances</b>	<b>118</b>
8.2.1	Pré-ordre interne	118
8.2.2	Pré-ordre externe	118
8.2.3	Distance globale et fusion	118
8.2.4	Représentation dans le cadre réversible	119
<b>8.3</b>	<b>Révision réversible</b>	<b>120</b>
8.3.1	Approche sémantique	120
8.3.2	Approche syntaxique	120

---



## 8.1 Introduction

Le cadre réversible permet d'exprimer des opérateurs de fusions déjà définis (comme les opérateurs à base de distance) et ainsi d'apporter la réversibilité à des processus de fusions tout en conservant leur caractéristiques.

nous proposons une généralisation du cadre réversible afin de représenter des opérateurs de fusions connus tels que la fusion à base de distance. La généralisation de la révision réversible est également décrite.

## 8.2 Fusion à base de distances

La fusion propositionnelle basée sur des distances a été proposée dans [76]. Elle exprimée sémantiquement par la fusion d'un ensemble de base de croyances  $E = \{K_1, \dots, K_n\}$  pour lesquelles chaque interprétation  $\omega$  est associée à un poids  $d(\omega, K_i)$  représentant la distance  $\omega$  à la base de croyance  $K_i$ . Pour plus de détail, se reporter au chapitre 4. La distance utilisée est la pseudo distance de Hamming, notée  $d_H$ , définie comme le nombre de variables propositionnelles pour lesquelles deux interprétations diffèrent. Plus généralement, Une distance entre une interprétation  $\omega$  et une base propositionnelle  $K_i$  est définie par  $d(\omega, K_i) = \min_{\omega' \in \text{Mod}(K_i)} (d(\omega, \omega'))$ .

### 8.2.1 Pré-ordre interne

A partir des distances entre les interprétations de  $\mathcal{W}$  à une base  $K_i$ , un pré-ordre interne  $\leq_{K_i}$  sur les interprétation est exprimé tel que :

$$\forall \omega, \omega' \in \mathcal{W}, \omega \leq_{K_i} \omega' \text{ ssi } d(\omega, K_i) \leq d(\omega', K_i)$$

A chaque base  $K_i$  correspond un pré-ordre interne sur les interprétations  $\leq_{K_i}$ . La fusion à base de distance spécifie toujours implicitement les pré-ordres internes au moyen de distances.

### 8.2.2 Pré-ordre externe

La fusion à base de distance doit le plus possible ne privilégier aucune base de croyance par rapport aux autres afin de respecter les postulats PK (voir le chapitre 4). La notion de pré-ordre externe n'est donc pas très développée dans ce cadre. Cependant, certains opérateurs de fusion utilise une priorité entre les bases (comme l'opérateur de somme pondérée). Dans ce cas, à chaque base de croyance  $K_i$  est associé un poids  $k_i$  permettant de représenter l'importance de la base. Plus le poids  $k_i$  est grand, plus la base  $K_i$  est importante.

### 8.2.3 Distance globale et fusion

La fusion à base de distance d'un ensemble de croyance repose sur l'expression d'une distance globale calculée à partir des distances entre une interprétation et les bases de croyances. Cette distance globale varie selon la stratégie  $p$  de fusion choisie. Les stratégies de fusion les plus connues sont la majorité ( $\Sigma$ ), la somme pondérée ( $\mathcal{WS}$ ), l'égalitariste idempotente ( $\mathcal{MA\mathcal{X}}$ ) et l'égalitariste lexicographique ( $\mathcal{GMA\mathcal{X}}$ ). Toutes ces stratégies sont détaillées au chapitre 4. A chaque stratégie correspond une distance globale définie telle que :

$$\begin{aligned} d_{\Sigma}(\omega) &= \sum_{i=1}^n d(\omega, K_i) \\ d_{\mathcal{WS}}(\omega) &= \sum_{i=1}^n k_i * d(\omega, K_i) \\ d_{\mathcal{MA\mathcal{X}}}(\omega) &= \max_{i=1, \dots, n} (d(\omega, K_i)) \\ d_{\mathcal{MA\mathcal{X}}}(\omega) &= (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall j, 1 \leq j \leq n, \exists i \in \mathbb{N}, \\ &\text{tel que } x_j = d(\omega, K_i) \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq j-1 \\ &\text{on a } x_k \leq x_j \end{aligned}$$

Le résultat de la fusion est la base de croyance  $\Delta(E)$  composée de l'ensemble des interprétations  $\mathcal{W}$  et munie du pré-ordre total  $\leq_p$ . Les croyances préférées sont les interprétations minimales pour  $\leq_p$ . L'exemple suivant illustre la fusion à base de distances.

**Exemple 25** Reprenons l'exemple 1 de la page 46. L'ensemble de bases de croyances à fusionner est défini par  $E = \{K_1, K_2, K_3\}$  avec  $K_1 = (s \wedge \neg f) \vee c$ ,  $K_2 = (s \vee c) \wedge p$  et  $K_3 = \neg c \wedge \neg s \wedge p$ . Les distances entre les interprétations et les bases ainsi que les distances globales sont données dans le tableau 8.1. Les stratégies

$\omega$	$d(\omega, K_1)$	$d(\omega, K_2)$	$d(\omega, K_3)$	$\Sigma$	$\mathcal{MAX}$	$\mathcal{WS}$	$\mathcal{GMAX}$
$\omega_0 = \{\neg p, \neg f, \neg s, \neg c\}$	1	2	1	4	2	6	(2, 1, 1)
$\omega_1 = \{\neg p, \neg f, \neg s, c\}$	0	1	2	3	2	7	(2, 1, 0)
$\omega_2 = \{\neg p, \neg f, s, \neg c\}$	0	1	2	3	2	7	(2, 1, 0)
$\omega_3 = \{\neg p, \neg f, s, c\}$	0	1	3	4	3	10	(3, 1, 0)
$\omega_4 = \{\neg p, f, \neg s, \neg c\}$	1	2	1	4	2	6	(2, 1, 1)
$\omega_5 = \{\neg p, f, \neg s, c\}$	0	1	2	3	2	7	(2, 1, 0)
$\omega_6 = \{\neg p, f, s, \neg c\}$	1	1	2	4	2	8	(2, 1, 1)
$\omega_7 = \{\neg p, f, s, c\}$	0	1	3	4	3	10	(3, 1, 0)
$\omega_8 = \{p, \neg f, \neg s, \neg c\}$	1	1	0	2	1	2	(1, 1, 0)
$\omega_9 = \{p, \neg f, \neg s, c\}$	0	0	1	1	1	3	(1, 0, 0)
$\omega_{10} = \{p, \neg f, s, \neg c\}$	0	0	1	1	1	3	(1, 0, 0)
$\omega_{11} = \{p, \neg f, s, c\}$	0	0	2	2	2	6	(2, 0, 0)
$\omega_{12} = \{p, f, \neg s, \neg c\}$	1	1	0	2	1	2	(1, 1, 0)
$\omega_{13} = \{p, f, \neg s, c\}$	0	0	1	1	1	3	(1, 0, 0)
$\omega_{14} = \{p, f, s, \neg c\}$	1	0	1	2	1	4	(1, 1, 0)
$\omega_{15} = \{p, f, s, c\}$	0	0	2	2	2	6	(2, 0, 0)

TAB. 8.1 – Représentation du calcul des distances locales et globales pour les opérateurs de fusion  $\Sigma$ ,  $\mathcal{WS}$ ,  $\mathcal{MAX}$ ,  $\mathcal{GMAX}$

de fusion permettent de construire des résultats différents. En effet,  $\Sigma$  donne la priorité aux interprétations  $\omega_9, \omega_{10}, \omega_{13}$  satisfaisant une majorité de bases. La stratégie  $\mathcal{WS}$  choisit quant à elle  $\omega_8$  et  $\omega_{12}$  car ce sont les interprétations qui satisfont  $K_3$  dont le poids est le plus important. Avec  $\mathcal{MAX}$ , les interprétations préférées sont  $\omega_8, \omega_9, \omega_{10}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}$ . Nous remarquons que  $\mathcal{GMAX}$  sélectionne les même interprétations que  $\mathcal{MAX}$ . Plus formellement :

$$\begin{aligned}
 \text{Mod}(\Delta_\Sigma(E)) &= \{\omega_9, \omega_{10}, \omega_{13}\} \\
 \text{Mod}(\Delta_{\mathcal{WS}}) &= \{\omega_8, \omega_{12}\} \\
 \text{Mod}(\Delta_{\mathcal{MAX}}) &= \{\omega_8, \omega_9, \omega_{10}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}\} \\
 \text{Mod}(\Delta_{\mathcal{GMAX}}) &= \{\omega_8, \omega_9, \omega_{10}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}\}
 \end{aligned}$$

## 8.2.4 Représentation dans le cadre réversible

Dans le cadre réversible, pour chaque base  $K_i$  la correspondance entre distance et poids interne est définie par :

$$p_{K_i}(\omega) = d(\omega, K_i)$$

Les poids internes sont des polynômes constants. Lors de la fusion de  $n$  bases propositionnelles le calcul du poids global est effectué comme exposé dans la section 7.1.2 les opérateurs de fusion à base de distance sont représentés dans le cadre réversible par des pré-ordres sur les polynômes. Les pré-ordres  $\leq_{\mathcal{MAX}}$ ,  $\leq_{\mathcal{SUM}}$ ,  $\leq_{\mathcal{WS}}$  et  $\leq_{\mathcal{GMAX}}$  donnés en 5.2, page 52 sont utilisés pour comparer les polynômes correspondant aux poids globaux pour les opérateurs de fusion  $\mathcal{MAX}$ ,  $\mathcal{SUM}$ ,  $\mathcal{WS}$  et  $\mathcal{GMAX}$  donnés dans [53]. Comme dans [12] le cadre proposé donne une contrepartie syntaxique pour les opérations de fusion à base de distance et de plus le cadre proposé apporte la réversibilité aux approches sémantique et syntaxique.

Nous pouvons également exprimer la révision d'un épistémique par un autre état épistémique dans notre cadre et le généraliser à la fusion d'états épistémiques. Soit  $\Psi_1, \dots, \Psi_n$ ,  $n$  états épistémiques. Chaque état épistémique  $\Psi_i$  peut être représenté par un pré-ordre total sur les interprétations  $\leq_{\Psi_i}$  ou par une base pondérée  $\Sigma_i$ . Pour la révision,  $n = 2$ . Nous pouvons exprimer la révision dans notre cadre pour l'approche sémantique en représentant les deux états épistémiques  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  par deux pré-ordres internes sur les interprétations  $\leq_{\Psi_1}$

et  $\leq_{\Psi_2}$ . Pour la révision de  $\Psi_1$  par  $\Psi_2$  nous avons comme pré-ordre externe  $\Psi_1 <_E \Psi_2$ . Pour la révision avec mémoire proposée dans [67], le pré-ordre global sur les interprétations est obtenu en utilisant le pré-ordre lexicographique  $\leq_{LEX}$  sur les polynômes défini en 5.2, page 52. Avec ces hypothèses, nous retrouvons les résultats de [16]. Pour l'approche syntaxique, les deux états épistémiques  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  sont représentés respectivement par deux bases pondérées  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Le pré-ordre externe est le même que pour l'approche sémantique  $\Psi_1 <_B \Psi_2$ . Après construction du poids global, le pré-ordre global sur les formules est obtenu en utilisant le pré-ordre lexicographique sur les polynômes. Pour  $n > 2$ , et pour des états épistémiques représentés par des pré-ordres totaux, le cadre réversible proposé permet de représenter la fusion d'états épistémiques.

### 8.3 Révision réversible

Nous montrons maintenant comment notre cadre pour la fusion réversible permet de généraliser l'approche proposée en [16] pour la révision réversible d'un point de vue sémantique et d'un point de vue syntaxique.

La révision d'états épistémiques peut être vue comme particulier de la fusion d'états épistémiques où l'on dispose de deux états épistémiques  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  avec un état prioritaire par rapport à l'autre.

#### 8.3.1 Approche sémantique

Dans la section 7.1 page 88, un ensemble d'états épistémiques  $\Psi = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}$  est représenté par un ensemble de couples  $\mathcal{C} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ . Le poids global externe est donné par :

$$q_{\oplus} = \sum_{i=0}^{n-1} q_{\mathcal{C}}(\xi_{i+1})x^i$$

Les poids globaux attachés aux interprétations sont tels que :

$$p_{\Psi_1 \oplus \dots \oplus \Psi_n}(\omega) = \sum_{i=1}^n p_{\Psi_i}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_{\mathcal{C}}(\xi_i)-1} MAX_{r_{\mathcal{C}}^{-1}(j)}}$$

avec

$$MAX_{r_{\mathcal{C}}^{-1}(j)} = \max_{\omega' \in \mathcal{W}} (deg(p_{r_{\mathcal{C}}^{-1}(j)}(\omega')) + 1)$$

Dans le cas de la révision,  $\Psi = \{\Psi_1, \Psi_2\}$  avec par exemple  $\Psi_1 < \Psi_2$ , ce qui est représenté par un ensemble de couples  $\mathcal{C} = \{\xi_1, \xi_2\}$  avec  $\xi_2 <_{\mathcal{C}} \xi_1$ . La fonction de pondération interne est donc telle que  $q_{\mathcal{C}}(\xi_1) = 1$  et  $q_{\mathcal{C}}(\xi_2) = 2$ . Le poids externe global est alors :

$$q_{\oplus} = q_{\mathcal{C}}(\xi_1) + q_{\mathcal{C}}(\xi_2)x = 1 + 2x$$

La fonction de rang absolu  $r_{\mathcal{C}}$  est telle que  $r_{\mathcal{C}}(\xi_1) = 1$  et  $r_{\mathcal{C}}(\xi_2) = 2$ , son inverse  $r_{\mathcal{C}}^{-1}$  étant tel que  $r_{\mathcal{C}}^{-1}(1) = \xi_1$  et  $r_{\mathcal{C}}^{-1}(2) = \xi_2$ . Le calcul du poids global attaché aux interprétations est le suivant :

$$\begin{aligned} p_{\Psi_1 \oplus \dots \oplus \Psi_n}(\omega) &= \sum_{i=1}^n p_{\Psi_i}(\omega) x^{\sum_{j=1}^{r_{\mathcal{C}}(\xi_i)-1} MAX_{r_{\mathcal{C}}^{-1}(j)}} \\ &= p_{\Psi_1}(\omega) x^0 + p_{\Psi_2}(\omega) x^{MAX_{r_{\mathcal{C}}^{-1}(1)}} \\ &= p_{\Psi_1}(\omega) x^0 + p_{\Psi_2}(\omega) x^{MAX_{\xi_1}} \end{aligned}$$

C'est exactement la définition proposée pour l'approche sémantique de la révision d'un état épistémique par un autre dans [16]. La stratégie de fusion utilisée est alors *LEX*, qui donne la priorité aux interprétations modèles des croyances apportées par  $\Psi_1$ .

#### 8.3.2 Approche syntaxique

Dans la section 7.2 page 98, un ensemble d'états épistémiques  $\Psi = \{\Psi_1, \dots, \Psi_n\}$  est représenté par un ensemble de bases de croyances stratifiées  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$ . Le poids global externe est donné par :

$$q_{\otimes} = \sum_{i=0}^{n-1} q_{\mathcal{B}}(\Sigma_{i+1})x^i$$

Le poids global associé à chaque formules composant la base de croyances pondérée globale est donné par :

$$p_{\Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n}(D_k) = \sum_{i=1}^k p_{s(\phi_{j_i})}(\phi_{j_i}) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(s(\phi_{j_i})) - 1} MAX_{r^{-1}(m)}}$$

avec  $D_k$  une disjonction de  $k$  formules provenant de  $k$  bases stratifiées et :

$$\Sigma_1 \otimes \dots \otimes \Sigma_n = \bigcup_{k=1}^n \{(D_k, p_{\otimes}(D_k))\}$$

Dans le cas de la révision,  $n = 2$  et  $\mathcal{B} = \{\Sigma_1, \Sigma_2\}$  avec par exemple  $\Sigma_1 <_{\mathcal{B}} \Sigma_2$ . La fonction de pondération sur les bases de croyances stratifiées est donnée par  $q_{\mathcal{B}}(\Sigma_1) = 1$  et  $q_{\mathcal{B}}(\Sigma_2) = 2$ . Le poids global externe est donc :

$$q_{\otimes} = \sum_{i=0}^{n-1} q_{\mathcal{B}}(\Sigma_{i+1}) x^i = q_{\mathcal{B}}(\Sigma_1) + q_{\mathcal{B}}(\Sigma_2)x = 1 + 2x$$

La fonction de rang absolu  $r_{\mathcal{B}}$  est telle que  $r_{\mathcal{B}}(\Sigma_1) = 1$  et  $r_{\mathcal{B}}(\Sigma_2) = 2$ . Son inverse  $r_{\mathcal{B}}^{-1}$  est quand à elle définie par  $r_{\mathcal{B}}^{-1}(1) = \Sigma_1$  et  $r_{\mathcal{B}}^{-1}(2) = \Sigma_2$ . La base de croyances stratifiée globale est dans notre cas :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 &= \{(\phi, p_{\otimes}(\phi)) \mid (\phi, p_{\Sigma_1}(\phi)) \in \Sigma_1\} \\ &\cup \{(\psi, p_{\otimes}(\psi)) \mid (\psi, p_{\Sigma_2}(\psi)) \in \Sigma_2\} \\ &\cup \{(\phi \vee \psi, p_{\otimes}(\psi)) \mid (\phi, p_{\Sigma_1}(\phi)) \in \Sigma_1, (\psi, p_{\Sigma_2}(\psi)) \in \Sigma_2\} \end{aligned}$$

Les poids globaux des formules sont tels que pour trois formules  $\phi$ ,  $\psi$  et  $\phi \vee \psi$  de  $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ , avec  $(\phi, p_{\Sigma_1}(\phi)) \in \Sigma_1$  et  $(\psi, p_{\Sigma_2}(\psi)) \in \Sigma_2$  nous avons :

$$\begin{aligned} p_{\otimes}(\phi) &= \sum_{i=1}^k p_{s(\phi_{j_i})}(\phi_{j_i}) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(s(\phi_{j_i})) - 1} MAX_{r^{-1}(m)}} \\ &= p_{\Sigma_1}(\phi) x^0 \\ &= p_{\Sigma_1}(\phi) \\ p_{\otimes}(\psi) &= \sum_{i=1}^k p_{s(\phi_{j_i})}(\phi_{j_i}) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(s(\phi_{j_i})) - 1} MAX_{r^{-1}(m)}} \\ &= p_{\Sigma_2}(\psi) x^{MAX_{\Sigma_1}} \\ &= p_{\Sigma_2}(\psi) x \\ p_{\otimes}(\phi \vee \psi) &= \sum_{i=1}^k p_{s(\phi_{j_i})}(\phi_{j_i}) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{B}}(s(\phi_{j_i})) - 1} MAX_{r^{-1}(m)}} \\ &= p_{\Sigma_1}(\phi) x^0 + p_{\Sigma_2}(\psi) x^{MAX_{\Sigma_1}} \\ &= p_{\Sigma_1}(\phi) + p_{\Sigma_2}(\psi) x \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien les définitions proposées pour l'approche syntaxique de la révision d'états épistémiques dans [16]. La stratégie permettant d'exprimer la révision est toujours *LEX*



## **Troisième partie**

# **Fusion de connaissances dans le cadre d'Arpenteur**



---

## Introduction

Nous proposons maintenant d'utiliser les techniques développées dans le cadre propositionnel afin de mettre en place des processus de fusion d'ensembles d'objets mesurée. Ce travail est basé sur la notion d'ensembles d'incohérence et de restauration de cohérence. Nous décrivons tout d'abord une représentation des entités en logique des prédicats instanciée utilisée pour définir la notion de cohérence d'un ensemble d'objets. Cette notion nous permet de construire des ensembles d'incohérence pointant les objets apportant l'incohérence lors de l'agrégation de plusieurs relevés. Deux méthodes de construction des ensembles sont présentées, l'une matricielle, l'autre basée sur les R-ensembles [65]. Nous présentons ensuite une formalisation de la fusion d'ensembles d'objets à partir des ensembles d'incohérence. Pour cela, Nous proposons trois techniques de rétablissement de cohérence : une méthode automatique, une méthode manuelle et une méthode hybride (ou automatisée).

Cette partie est composée de trois chapitres. Le chapitre 9 présente tout d'abord un bref état de l'art sur la photogrammétrie, son historique et ses principes. L'organisation de l'outil Arpenteur et son fonctionnement sont ensuite décrits. Le chapitre 10 apporte une nouvelle représentation des connaissances mise en place au sein d'arpenteur. Cette représentation, appelée représentation par entité, est issue de la représentation initiale d'Arpenteur étendue grâce à la notion de contraintes intrinsèques et extrinsèques. Le chapitre 11 illustre l'application du cadre de fusion réversible développé au chapitre ?? à la représentation par entité. Il est composé d'une formalisation en logique des prédicats instanciés d'un ensemble d'objets représentés par des entités, de la proposition de deux méthodes de détection d'incohérence à partir de cette nouvelle formalisation et de la mise en place de trois méthodes de fusion utilisables : La fusion automatique, la fusion manuelle et la fusion automatisée.





## Chapitre 9

# Etat de l’art

### Contents

---

<b>9.1</b>	<b>La photogrammétrie . . . . .</b>	<b>128</b>
9.1.1	Histoire de la photogrammétrie . . . . .	128
9.1.2	Principe de la photogrammétrie . . . . .	129
9.1.3	Relevé photogramétrique . . . . .	129
<b>9.2</b>	<b>Le projet Arpenteur . . . . .</b>	<b>130</b>
9.2.1	Historique . . . . .	130
9.2.2	Mesure fondée sur la connaissance . . . . .	131
<b>9.3</b>	<b>Processus de restitution . . . . .</b>	<b>131</b>
9.3.1	Processus de mesure . . . . .	132
9.3.2	Restitution des objets . . . . .	133

---

## 9.1 La photogrammétrie

Nous proposons ici un bref état de l'art sur la photogrammétrie. Cette section est inspirée de [29], qui peut être consulté pour plus de détails. Le mot « Photogrammétrie » est énoncé pour la première fois en 1893 par l'architecte allemand Albrecht Meydenbauer<sup>1</sup>. Le mot photogrammétrie provient des mots grecs *photos* (lumière), *gramma* (chose écrite ou dessinée) et *metron* (mesure) et désigne la technique qui permettait à Meydenbauer de poursuivre ses relevés de monuments.

En 1980, dans la quatrième édition du « Manual of photogrammetry » [64], l'American Society of Photogrammetry en donne une définition incluant la télédétection et des modes d'enregistrement des images allant de la vidéo aux images radar en passant par les photographies ultraviolet ou infrarouge.

« *La photogrammétrie est la science ou la technique permettant d'obtenir des informations fiables sur l'espace naturel ou sur des objets physiques par l'enregistrement, la mesure et l'interprétation d'images photographiques ou produites par rayonnement électromagnétique ou autre phénomènes*<sup>2</sup> ». Implicitement, la notion de mesure est associée au terme de photogrammétrie.

### 9.1.1 Histoire de la photogrammétrie

C'est en 1852 que le capitaine Aimé Laussedat (officier du génie civil et savant) remplace les perspectives dessinées par des photographies et nomme le procédé « Métrophotographie ». En 1861, Laussedat réalise le premier relevé topographique complet sur le village de Buc, près de Versailles, à l'aide de huit prises de vues.

En Allemagne, Meydenbauer utilise dès 1858 la photographie pour des travaux de rénovation de la cathédrale de Wetzlar. Il introduit le terme « Photogrammétrie » en 1893 et celui-ci est utilisé depuis dans toutes les langues. Meydenbauer a fondé à Berlin le Messbildanstalt qui a mémorisé le patrimoine architectural allemand en réalisant près de 76000 clichés de 1885 à 1945.

La photogrammétrie doit son essor grâce au besoin d'une cartographie avec altimétrie. Elle s'organise alors autour de la vision stéréoscopique qui permet de l'obtenir aisément. Bien que les principes de la perception du relief soient connus depuis longtemps, il fallut attendre 1902 pour voir fabriqué par Edouard Deville le premier appareil de restitution utilisant la vision stéréoscopique. Celle-ci permet une identification sûre des points homologues sur deux photographies. Cependant, l'appareil de Deville est difficile d'emploi et ne permet pas une reproduction rigoureuse du terrain, il ne parvient donc pas à s'imposer.

En 1911, la compagnie Carl Zeiss, à Iena, construit le premier vrai stéréorestituteur, au sens moderne du terme, appelé Stéréautographe. Cet appareil permet mécaniquement le tracer en continu de courbes de niveaux, le repère spatial de mesure étant guidé stéréoscopiquement par l'opérateur.

Des lors, les avancées dans le domaine de la photogrammétrie vont de pair avec les progrès dans la conception et la fabrication d'appareils de restitution et des chambres de prises de vues. La cartographie à partir de prises de vues aériennes est notamment développée.

A partir de 1970, les moyens de calcul ainsi que les capteurs optiques se sont développés. L'apparition de nouvelles contraintes, dues en partie au milieu industriel, a amené l'émergence d'une technique nouvelle : la photogrammétrie terrestre, ou « close-range photogrammetry ». Cette nouvelle technique a permis un renouvellement important des outils et des processus de mesure. Pour des raisons de coût et de commodités d'emploi, on a cherché à utiliser des appareils plus légers utilisant des supports d'enregistrement numériques (vidéo, CCD<sup>3</sup>). La multiplication des images et les progrès des calculateurs ont permis l'émergence de nouvelles méthodes de calcul d'orientation comme l'ajustement de faisceaux. A partir de cette technique, les méthodes d'étalonnage des paramètres internes des caméras vont considérablement ouvrir le champ d'application de la photogrammétrie.

Parallèlement, en 1964 que le sous-marin *Asherah*, avec le soutien financier de la *National Geographic Society*, a inauguré en Turquie, par 35 m de fond, les toutes premières prises de vues stéréoscopiques sous-marines, sur l'épave byzantine Yassi Ada 2 [8][9]. Les liens entre la photogrammétrie et l'archéologie sous-aquatique et sous-marine allaient de plus en plus se renforcer au fil du temps grâce à l'évolution des techniques et du matériel. Cependant, la photogrammétrie est encore très peu employée en archéologie sous-marine.

<sup>1</sup> 30 avril 1834 - 15 Novembre 1921

<sup>2</sup> Traduction de Gilles Gaillard, 1992

<sup>3</sup> Charge-Coupled Device, ou détecteur à couplage de charge

### 9.1.2 Principe de la photogrammétrie

La photogrammétrie utilise des méthodes provenant de disciplines telles que l'optique et la géométrie projective. Elle permet de localiser dans un espace 3D des points d'une scène en utilisant les propriétés optiques des appareils de prises de vues. Nous rappelons maintenant quelques notations courantes en photogrammétrie.

**Une caméra** désigne un appareil de prise de vue permettant de projeter une scène en 3D sur un support 2D selon les lois de l'optique.

**Le capteur** est le support sur lequel les points de la scène sont projetés et enregistrés par le système optique de la caméra.

**Les points image** sont les points 2D sur le capteur représentant un point  $P$  de la scène. Les points images sont notés  $p_n$ , où  $n$  désigne la caméra par laquelle  $P$  est projeté.

**Des points homologues** désignent les points images représentant le même point de la scène sur des capteurs différents.

**Le centre de perspective** d'une caméra est le centre de perspective du système optique. Par convention, le centre optique d'une caméra  $n$  est noté  $O_n$ .

**La droite de visée** d'un point  $P$  pour une caméra  $n$  est la droite passant par le point image  $p_n$  de  $P$  et le centre de perspective  $O_n$  de la caméra.

La mesure photogrammétrique d'un point  $P$  d'une scène repose sur le calcul de l'intersection des droites de visées de  $P$ , comme illustré en figure 9.1. En réalité, à cause d'erreurs diverses (perspective non centrale,

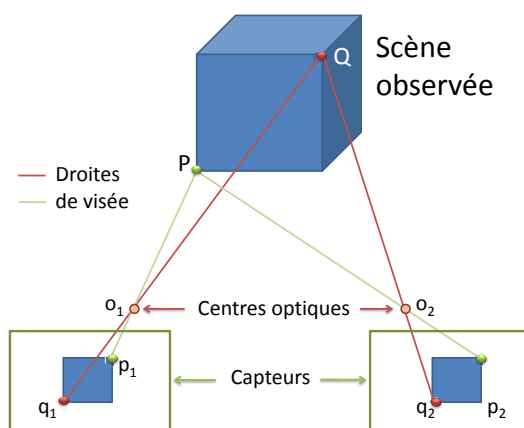


FIG. 9.1 – Principe de la photogrammétrie.

aberration des systèmes optiques, distorsion, déformation du capteur, etc...) les deux droites de visées ne se coupent jamais dans l'espace. Le point  $P$  est alors assimilé au milieu de la perpendiculaire commune aux deux droites  $(O_1P_1)$  et  $(O_2P_2)$ . Le relevé photogrammétrique est le processus permettant de produire un modèle 3D d'une scène à partir de photographies.

### 9.1.3 Relevé photogrammétrique

Le relevé photogrammétrique repose sur des calculs géométriques complexes. Ce travail de thèse reposant sur la photogrammétrie sans apporter de contribution aux techniques fondamentales de ce domaine, nous ne détaillons pas ici de manière exhaustive toutes les étapes du processus de restitution. Pour plus de détails, se

référer à [29], [19] et [64]. Le processus de relevé photogrammétrique peut être divisé en deux phases principales. La première est la phase comprend la préparation du site, du matériel de prise de vue, sa calibration si nécessaire et la prise de vue elle-même. La calibration permet de déterminer l'orientation interne des caméras, c'est à dire les paramètres géométriques de la transformation effectuée par les caméras lors de la prise de vues.

La deuxième phase est celle de la restitution photogrammétrique qui traite les photographies afin de procéder aux mesures. La restitution est elle-même composée de l'orientation des photographies, durant laquelle la position des caméras dans l'espace est déterminée et de la mesure des objets.

La photogrammétrique est un processus de mesure indirect qui peut être divisé en étapes accomplies à des moments différents. La préparation du site et la prise de vue ont lieu in-situ. La calibration des caméras, l'orientation et la mesure peuvent être effectués en laboratoire. La figure 9.2 illustre les différentes étapes dans le processus de relevé.

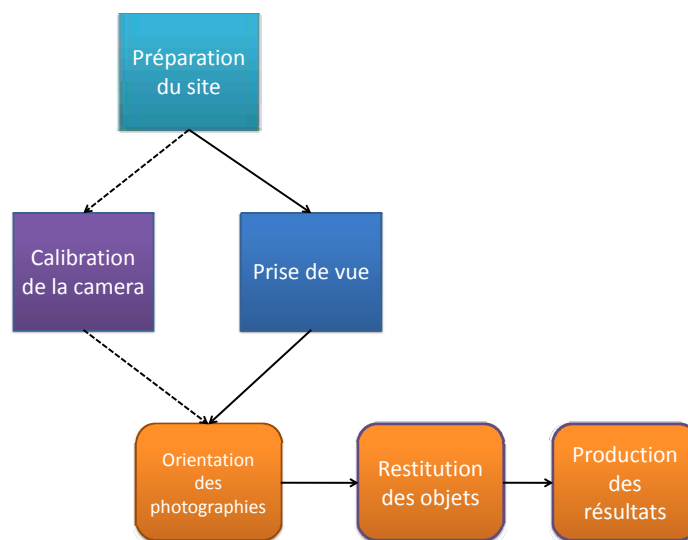


FIG. 9.2 – Processus de relevé photogrammétrique.

Le premier résultat du relevé photogrammétrique est un ensemble de points observés dans l'espace. À partir de ces points, il est possible de procéder à des mesures, de construire des primitives géométriques ou encore une représentation 3D des objets, si les observations sont suffisantes.

## 9.2 Le projet Arpenteur

### 9.2.1 Historique

Le projet Arpenteur (An Architectural PhotogrammEtry Network Tool for Education and Research) a été initié par Pierre Drap, Gilles Gaillard et Pierre Grussenmeyer en 1998 [31]. Il s'agit d'un ensemble d'outils logiciels pour la photogrammétrique développés originellement par les équipes GAMSAU<sup>4</sup> et PAGE<sup>5</sup> du laboratoire MAP (Modèles et simulations pour l'Architecture, l'urbanisme et le Paysage, umr CNRS 694).

Les justifications originelles du projet étaient :

- Le besoin pour les domaines de l'éducation et de la recherche d'un outil permettant à des équipes éloignées de travailler sur des sites communs et d'échanger leurs résultats.
- Le développement d'un outil dédié à l'architecture profitant de l'expertise des deux équipes GAMSAU et PAGE dans les domaines de la photogrammétrique et de la représentation des connaissances architecturales.
- La mise en place d'un système de photogrammétrique léger et simple, adapté à la photogrammétrique terrestre.

<sup>4</sup>École supérieure d'architecture de Marseille

<sup>5</sup>Institut National des Sciences Appliquées, Strasbourg

En tant que système photogrammétrique, Arpenteur s'appuie sur des choix techniques et conceptuels.

Le premier choix consiste à utiliser des images digitales obtenues à l'aide d'appareils de photographie numérique que l'on trouve aujourd'hui dans le commerce et dont certains présentent des caractéristiques suffisantes en ce qui concerne la qualité des images. Ces images numériques offrent également à l'utilisateur des outils de traitement qui automatisent certaines tâches habituellement réalisées par un opérateur humain (Logiciels de traitement d'images, ...). Enfin, elles permettent l'intégration totale de la chaîne de traitement depuis les photographies jusqu'à certains résultats finaux comme la visualisation en 3 dimensions dans les logiciels de CAO DAO 3D.

Cette intégration est mise à profit pour servir un autre choix conceptuel fondé sur l'idée d'un processus guidé par les connaissances relatives au domaine. Concernant l'architecture, aussi bien que l'archéologie, il s'agit de permettre à l'expert du domaine d'exploiter ses connaissances pour produire un résultat le plus conforme possible à ses vœux. Le résultat peut se présenter sous la forme de documents de relevé, de fichiers dédiés à la visualisation ou un corpus destiné à une base de donnée.

### 9.2.2 Mesure fondée sur la connaissance

Arpenteur utilise les connaissances de l'expert tout au long du relevé. Il utilise diverses connaissances afin d'alléger les différentes étapes du processus. L'utilisation des connaissances des experts est faite de plusieurs manières différentes. Tout d'abord, la connaissance des objets à mesurer permet de proposer une interface de mesure très adaptée aux différents contextes (Archéologie sous-marine, architecture, biologie sous marine). Ensuite, l'utilisation d'un modèle théorique des objets mesurés permet de définir des valeurs par défaut et pour certains un modèle 3D. Les objets restitués sont le résultat de la fusion de modèles théoriques et des observations. Enfin, un relevé photogrammétrique peut produire une grande quantité de résultats. Il convient donc de savoir les organiser, les présenter et les utiliser en les mêlant à d'autres données.

Il s'agit ici d'utiliser les capacités de la photogrammétrie pour faire un pas vers un système d'information patrimonial liant les données géo référencées à un ensemble de données préexistantes. Les modèles 3D générés pouvant servir d'interface vers des bases de données maintenues et mises à jour séparément et indépendamment du relevé photogrammétrique.

## 9.3 Processus de restitution

Arpenteur est un outil de mesure photogrammétrique fondé sur la connaissance. Son but est de permettre la restitution d'un site archéologique, architectural ou encore zoologique en mêlant un relevé photogrammétrique à de la connaissance experte.

La plupart des systèmes ou outils de mesures actuels produisent de la géométrie qui, bien que très complète et fidèle à l'objet original, ne reflète qu'une partie des connaissances exprimables sur l'objet. Le lien entre le résultat de la mesure et les connaissances des experts du domaine est fait en aval et indépendamment du processus de mesure. Arpenteur permet non seulement d'intégrer de la connaissance à la géométrie produite, mais aussi de piloter la création de cette géométrie. Son fonctionnement général est décrit par le schéma d'utilisation 9.3. L'outil repose sur l'existence d'un modèle photogrammétrique préalable. Un modèle photogrammétrique est un ensemble de photographies orientées dans l'espace (pour plus de détail voir la section 9.1, en page 128). Cet ensemble de photographies peut être disponible localement ou sur un serveur distant. Une fois un modèle chargé, l'utilisateur procède à la mesure des objets via l'interface dédiée. Celle-ci est composée d'un module de digitalisation, permettant la mesure photogrammétrique des objets, ainsi que d'un module de saisie d'informations diverse relatives à la description des objets. Une fois la digitalisation et l'ajout d'informations terminées, la mesure de l'objet est obtenue par restitution de celui-ci. La restitution peut être soit numérique, soit logique. La restitution numérique est la méthode la plus simple. Elle est basée exclusivement sur des calculs géométriques. La restitution logique repose sur un système expert qui à partir des points 3D mesurés détermine la façon optimale de procéder aux mesures et à la reconstruction 3D pour que l'objet restitué soit le plus proche possible de la réalité [28]. Nous présentons maintenant une description du processus de mesure vu par l'utilisateur.

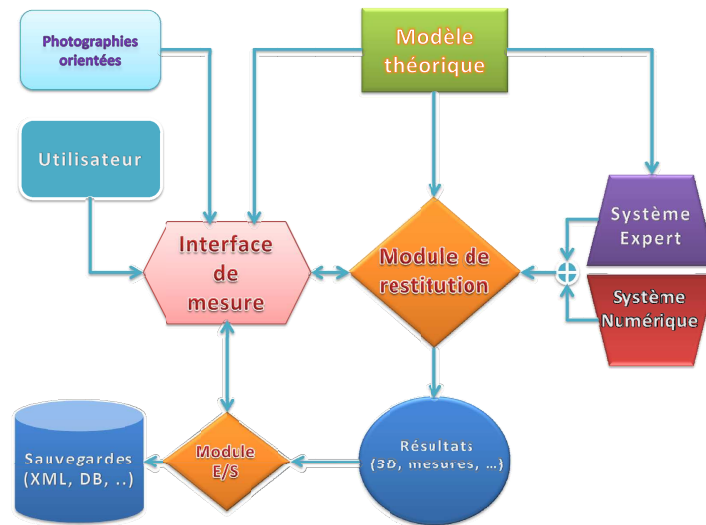


FIG. 9.3 – Fonctionnement de l'outil de mesure Arpenteur.

### 9.3.1 Processus de mesure

Nous ne revenons pas ici sur la manière d'obtenir un modèle photogrammétrique, celle-ci étant décrite en section 9.1. Après avoir choisi un modèle, l'utilisateur peut entamer la mesure grâce à l'interface dédiée, comme nous le voyons en figure 9.4. L'interface de mesure est composée de trois modules différents :



FIG. 9.4 – Interface utilisateur de l'outil de mesure.

- Le panneau d'affichage des photographies et de pointage est dédié à la mesure photogrammétrique. L'utilisateur marque un même point sur les deux photographies afin de permettre le calcul de la position du point dans l'espace ;
- Le module de digitalisation principal permet le contrôle du panneau de pointage et l'activation d'aides à la mesure, comme l'utilisation de la ligne épipolaire ou encore de la corrélation ;
- Le module de saisie spécifique au domaine d'étude est le lien principal entre les connaissances expertes et les mesures photogrammétriques. Ce module est propre aux objets étudiés (amphore, corail, bloc). La figure 9.5 nous montre le module de saisie pour des amphores. Dans ce module, l'utilisateur peut sélectionner la zone de l'objet qu'il mesure par photogrammétrie et digitaliser des points sur les photographies

afin de permettre le calcul de la géométrie de l'objet.

Le module de saisie est aussi l'interface permettant de recueillir les informations non mesurables directement. Des formulaires spécifiques permettent de saisir des informations utiles aux experts. Dans le cadre de la mesure d'amphores, le panneau de saisie (que nous voyons en figure 9.5) permet de prendre en compte le type de l'amphore, s'il s'agit d'une amphore entière ou brisée en fragments, le nombre de fragments des informations textuelles sur sa localisation ou encore sur ses identifiants de fouille. Une fois la digitalisation terminée,

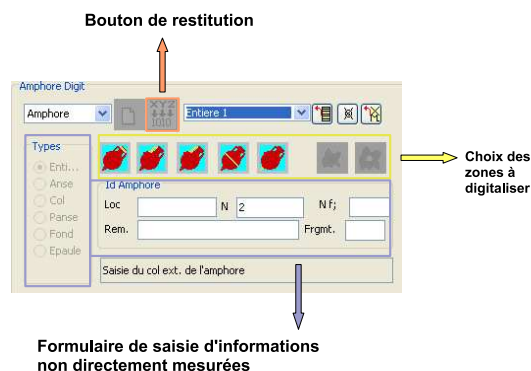


FIG. 9.5 – Module de saisie spécifique aux amphores.

la création de l'objet mesuré passe par sa restitution. La restitution est demandée grâce au bouton de restitution présent sur le module de saisie spécifique.

### 9.3.2 Restitution des objets

Le projet Arpenteur vise à intégrer de la connaissance au processus de mesure. Une des composantes de cette intégration est l'utilisation d'un système expert pour la restitution des objets [28]. Dans de nombreux cas, comme pour la mesure d'amphores, l'objet ne peut pas être mesuré entièrement. Celui-ci peut en effet être partiellement détruit ou invisible. Cependant, les objets pour lesquels nous pouvons définir des modèles géométriques peuvent être reconstruits grâce à des hypothèses de reconstructions. Les hypothèses de reconstructions ainsi que les observations faites durant la saisie photogrammétrique sont utilisées afin de produire une liste d'action permettant la restitution des objets mesurés. La figure 9.6 illustre le fonctionnement du système expert et la génération d'actions de restitution. La figure 9.6 illustre le mécanisme. La restitution est basée sur deux sources de données :

- **Le modèle théorique** contient les descriptions des objets à mesurer. Il contient aussi la description de toutes les actions de restitution ainsi que celle des faits permettant de déclencher une action. Un fait peut être observé ou inféré. Dans le premier cas, il représente une observation directe. Dans le second, il représente le résultat d'une inférence du système. Le lien entre un ensemble de faits et une action correspondante est fait au moyen de règles de restitution. Le modèle théorique contient également un ensemble de valeurs par défaut pour les objets à mesurer.
- **Les observations** sont les données directement recueillies durant la phase de saisie. Elles se composent d'informations numériques ou textuelles relative aux objets que l'on veut reconstruire. Pour la plus grande partie ces observations sont composées de points dans l'espace calculés par photogrammétrie.

A partir des deux sources, nous construisons une base de connaissance composée d'une base de faits et d'une base de règle. Les faits sont groupés en deux grande catégorie.

- **Les faits initiaux** sont directement créés à partir des observations et du modèle théorique et ne sont pas modifiables au cours de l'inférence.
- **Les faits inférés** sont générés au cours de l'inférence. Une partie de ces faits compose l'ensemble des faits d'action, qui décrivent les actions à mener pour mesurer les objets.



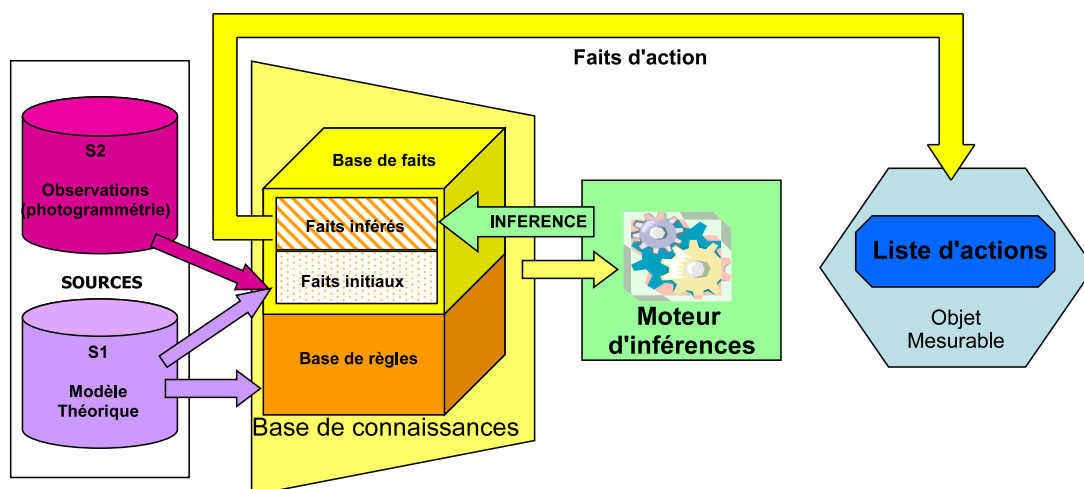


FIG. 9.6 – Schéma de fonctionnement du système à base de connaissance.

Lorsque l'inférence est terminée, une liste d'action de mesure est disponible et permet la restitution de l'objet. Les actions peuvent utiliser des données observées mais aussi des valeurs par défaut données par le modèle théorique. Si les observations disponibles sont peu nombreuses ou de mauvaise qualité, les actions listées auront tendance à utiliser beaucoup de valeurs par défaut. L'objet restitué se rapprochera alors du modèle théorique. La sauvegarde de la liste des actions utilisées pour restituer l'objet permet à l'utilisateur de savoir quelles sont les observations problématiques ou manquantes pour une restitution plus juste.

## Chapitre 10

# Représentation des connaissances dans le cadre d'Arpenteur

### Contents

---

<b>10.1</b>	<b>Connaissances pluridisciplinaires . . . . .</b>	<b>136</b>
<b>10.2</b>	<b>Fondements du projet Arpenteur et premier formalisme de représentation . . . . .</b>	<b>137</b>
<b>10.3</b>	<b>Représenter les objets d'un domaine . . . . .</b>	<b>137</b>
<b>10.4</b>	<b>Taxinomie d'objets mesurables . . . . .</b>	<b>139</b>
10.4.1	Notion d'item mesurable . . . . .	140
10.4.2	Taxinomie d'items mesurables . . . . .	140
10.4.3	Limite de la taxinomie et typologie . . . . .	141
<b>10.5</b>	<b>Contraintes sur les objets . . . . .</b>	<b>141</b>
10.5.1	Relations entre les objets et contraintes sur les relations . . . . .	142
<b>10.6</b>	<b>Représentation des connaissances dans Arpenteur . . . . .</b>	<b>143</b>

---

## Introduction

Le but du projet Arpenteur est de fournir aux experts de différents domaines de recherche un ensemble d'outils de mesures utilisables sans nécessiter l'intervention d'un spécialiste [32] [30].

Le développement de tels outils repose sur la collaboration d'experts de différents domaines de recherche avec des spécialistes de la mesure [33]. Le transfert de connaissance entre tous les acteurs impliqués nécessite la mise en place d'une représentation des connaissances adéquate.

Dans cette partie nous décrivons les connaissances qui entrent en jeu dans le processus de développement des outils et nous proposons une représentation basée sur la notion d'entité introduite par Pierre Drap [29].

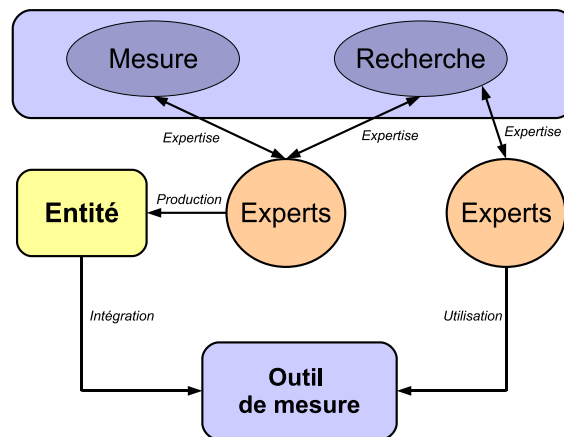


FIG. 10.1 – Création d'un outil de mesure fondé sur la connaissance experte..

La figure 10.1 illustre le processus de développement d'un outil de mesure en utilisant basé sur des entités. Nous présentons maintenant la méthode de création d'entités et leur utilisation.

## 10.1 Connaissances pluridisciplinaires

Le développement d'outils de mesures destinés à des non spécialistes est articulé autour de deux axes :

- Cerner les besoins des experts du domaine.
- Mettre en place des méthodes de mesures répondant aux besoins.

Une réponse au problème posé par ces deux axes est la mise en place de concepts représentant des objets rassemblant les attentes des experts et capable d'être mesurés. Ces objets peuvent être des objets physiques ou des ensembles de données nécessaire au travail des experts et pouvant être déterminées lors du processus de mesure.

A partir de cette description informelle, nous pouvons réduire notre notion de domaine de connaissance à l'ensemble des connaissances liées aux objets. Par exemple, dans le cadre de l'archéologie sous marine, le domaine de connaissance se compose de modélisations des objets archéologiques (amphores, morceaux d'épaves) comprenant entre autre des valeurs métrologiques, des attributs de consistance, des datations, des information bibliographiques [70] [25] [34].

A partir de la notion de domaine adaptée à nos besoins, nous pouvons adapter également la notion d'expert. Nous appelons expert d'un domaine une personne servant d'interface entre un domaine et des personnes extérieures à celui-ci. Un domaine peut bien sur avoir plusieurs experts et les photogrammètres peuvent être vus eux même comme des experts.

La création d'un système de mesure fondé sur la connaissance nécessite la collaboration d'au moins un expert d'un domaine avec un expert de la mesure. Cette collaboration n'est possible que si un formalisme de représentation des connaissances permettant de représenter les connaissances nécessaires issues des domaines différents est défini.

## 10.2 Fondements du projet Arpenteur et premier formalisme de représentation

Le projet Arpenteur a été développé pour répondre à un manque d'intégration entre mesure et connaissance dans le domaine de l'architecture. Les fondements d'un outil de mesure à base de connaissances ont été développés dans le cadre du projet PAROS [29]. Comme le montre la figure 10.2. Le projet PAROS avait pour

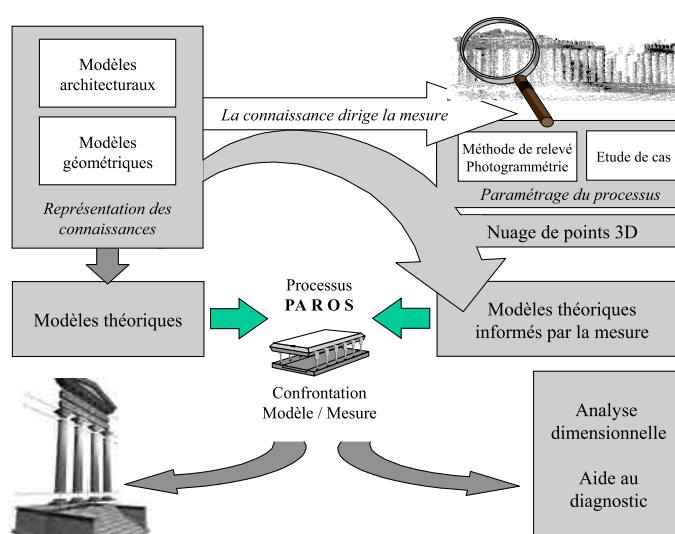


FIG. 10.2 – Schéma général du projet PAROS

but d'utiliser les connaissances architecturales afin de rectifier ou compléter des mesures d'édifices. Ces mesures pouvant être photogrammétriques ou topographiques. Plus spécifiquement, de la connaissance issue du domaine architectural dirige un processus de mesure. Une fois le processus terminé, la connaissance est utilisée pour construire des modèles géométriques et diagnostiquer des erreurs éventuelles de mesure.

La représentation mise en place pour les objets architecturaux est basée la notion d'entité. Une entité est un ensemble composé de connaissances géométriques et de connaissances liées au domaine architectural. La figure 10.3 montre les composantes d'une entité architecturale.

## 10.3 Représenter les objets d'un domaine

La définition des objets d'un domaine repose sur leur description formelle. Les experts des domaines possèdent des descriptions précises de ces objets reposant sur des informations hétérogènes. En effet, ces informations peuvent être des fiches de renseignements, des schémas ou dessins, des données spatiales, des informations textuelles ou de la littérature, des bibliographies, des informations géographiques ou encore des classifications [35] [71]. La figure 10.4 est une des données relatives à la description des amphores : leur profil. Dans le cas particulier des amphores, les informations disponibles sont

- les données métrologiques (hauteur, diamètre de panse, volume, ...);
- les données spatiales (position, enveloppe convexe, représentation 3D);
- les données chimiques (type de pâte, couleur, analyse du contenant);
- la documentation archéologique (datations, bibliographies, études).

Les support de ces informations varient des fiches de renseignement remplies par les archéologues, aux représentations 3D informatiques en passant par les carnets de fouilles ainsi que les bases de données. Du fait de l'hétérogénéité des informations disponibles et des supports, un formalisme adapté à notre problème est le

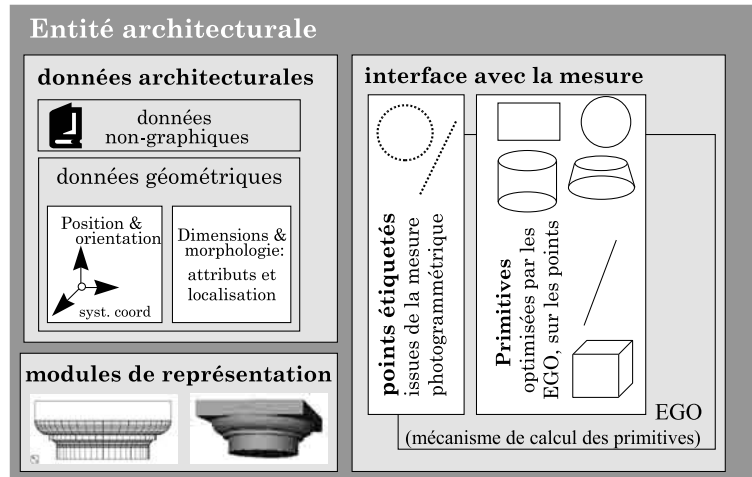


FIG. 10.3 – Structure d'une entité dans le projet PAROS



FIG. 10.4 – Le profil d'une amphore PY 4 [71].

formalisme conceptuel. En effet, la définition de concepts revient alors aux experts concernés et l'assemblage des concepts différents en des concepts globaux est faite selon un point de vue connu de tous.

Les concepts formalisés proviennent de la connaissance du domaine de recherche. Les descriptions servant de base à la conceptualisation sont exprimées par des publications, des entretiens avec les experts des domaines, des formalismes préexistants. Dans le cadre de l'archéologie par exemple, la conceptualisation s'appuie sur les travaux d'archéologues tels que H. Dressel ou M. Py pour les amphores romaines et étrusques [35] [71]. En ce qui concerne l'architecture, les dictionnaires et classifications de J. P. Adam [1], J. M. Perouse De Montclos [62] et R. Ginouves [47] [48] sont autant de sources de descriptions utilisées comme base du formalisme.

La première étape dans la représentation des objets d'un domaine passe donc par une conceptualisation. A partir des descriptions hétérogènes, les experts expriment un concept ainsi qu'un ensemble d'attributs pour celui-ci, comme le montre la figure 10.5. Dans le domaine de l'archéologie sous-marine par exemple, les experts définissent un ensemble d'attributs à partir des informations fournies sur les amphores. Cet ensemble d'attribut peut être utilisé pour exprimer le concept d'amphore, comme nous le voyons en figure 10.6. Ce concept est à la fois utilisable lors du processus de mesure et lors du travail spécifique des experts. Cependant, cette repré-

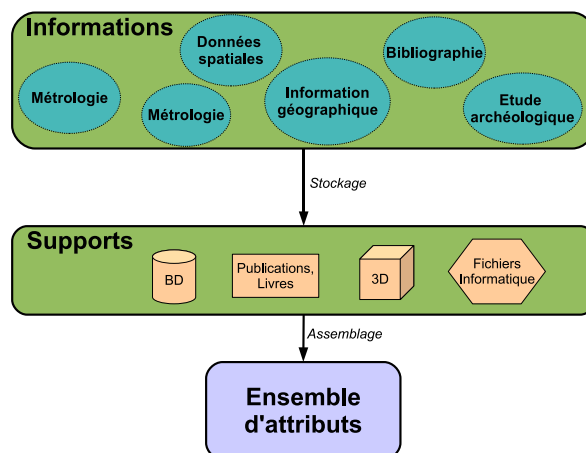


FIG. 10.5 – Expression des descriptions sous forme d'ensemble d'attributs.

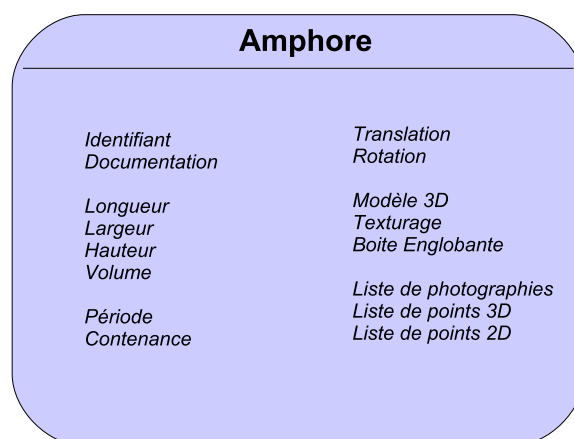


FIG. 10.6 – Concept représentant une amphore.

sensation conceptuelle est très limitée, seule l'existence d'un attribut pour un concept donné est exprimable. Lors de mesures et d'acquisitions de données, l'existence ou non d'une information n'est pas suffisante. Des connaissances qualitatives et quantitatives sur les attributs doivent être exprimées. De plus, dans le contexte de travaux pluridisciplinaires, il est nécessaire de définir des concepts transversaux et de les classer selon un point de vue compréhensible par le plus grand nombre.

## 10.4 Taxinomie d'objets mesurables

La représentation conceptuelle des objets de différents domaines permet d'exprimer les objets - ou au moins une partie des connaissances sur un objet - d'un domaine à l'autre. Cependant, il est impossible de développer des techniques de mesures et des outils adaptés si chaque ensemble de concepts issus d'un domaine particulier n'est pas compréhensible par les experts d'un autre domaine. Afin de garantir la transversalité des concepts exprimés, nous pouvons les ordonner suivant un point de vue partagé par tous. Ce point de vue est la notion d'objet mesurable. En effet, notre cadre de travail est basé sur la mesure photogrammétrique. Tous les objets étudiés sont obligatoirement mesurables par photogrammétrie. Les concepts caractérisant les objets de tous les domaines impliqués (archéologie, architecture, biologie) sont alors exprimés du point de vue de la mesure.

### 10.4.1 Notion d'item mesurable

Les domaines de recherches sont souvent indépendants ou ne possèdent qu'une faible connaissance commune. La construction d'une représentation utilisable par les experts des différents domaines repose sur un la détermination d'un ensemble des connaissances minimales partagé par tous les experts. Dans notre cadre,

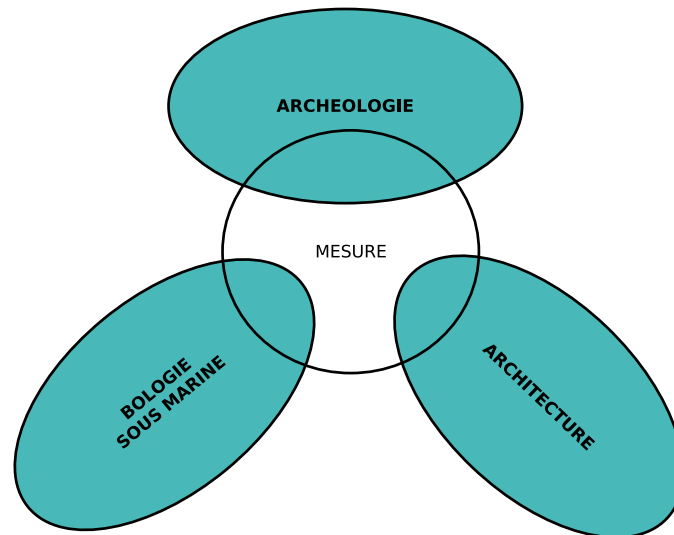


FIG. 10.7 – Domaines de connaissance

comme le montre la figure 10.7, la seule connaissance commune à tous dans notre contexte est la connaissance liée à la mesure des objets. Quelque soit le domaine, les outils développés seront destinés à travailler sur des objets mesurables par photogrammétrie. Nous appelons "*Item Mesurable*" le concept d'objet mesurable. Tous les experts de tous les domaines peuvent alors étendre la notion d'Item Mesurable afin de la spécifier et de lui intégrer des connaissances issues d'un domaine particulier.

### 10.4.2 Taxinomie d'items mesurables

Comme nous l'avons vu, tous les concepts caractérisant des objets à mesurés sont des sous-concept d'item mesurable. Nous pouvons alors mettre en place une organisation des concepts du point de vue de la mesure en définissant la notion d'attribut morphologique. Un attribut morphologique est un attribut d'objet renseigné durant le processus de mesure. Par exemple une amphore possède comme attributs morphologiques une datation, un diamètre de col, un diamètre de panse, un diamètre de pied, une longueur, une largeur, une hauteur. Bien que quatre premiers attributs cités soient spécifiques à une amphore, les trois derniers sont communs à tous les objets de l'espace 3D mesurés.

La présence d'attributs communs nous permet d'organiser les concepts suivant une relation d'héritage. Chaque concept *B* possédant tous les attributs morphologiques d'un concept *A* et ayant des attributs morphologiques supplémentaires est un sous-concept de *A*. Nous appelons dans ce cas le concept *A* un super-concept, par analogie avec la nomenclature du modèle Objet (voir la section 3.5.2, page 33). En posant la condition qu'un concept ne peut avoir au maximum qu'un seul super-concept, notre relation d'héritage nous permet de définir une taxinomie d'objets mesurables.

Comme le montre la figure 10.8, dans notre cadre, trois grands ensembles sont caractérisés par la taxinomie : les objets archéologiques, les objets architecturaux et les objets zoologiques. Chacun de ces ensembles étant lui-même subdivisé en plusieurs spécialisations, comme c'est le cas pour les amphores.

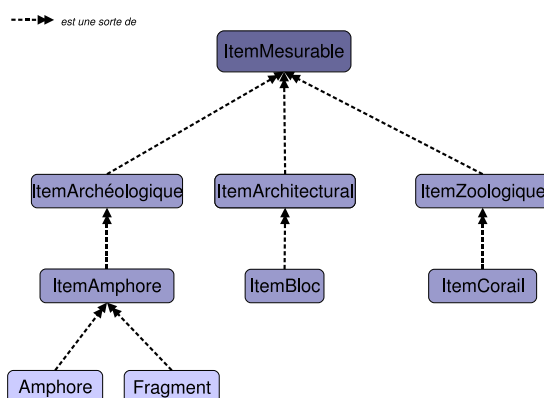


FIG. 10.8 – Taxinomie des objets mesurables.

### 10.4.3 Limite de la taxinomie et typologie

La taxinomie mis en place est exprimée du point de vue de la mesure. Bien qu'elle permette représenter dans un même cadre des objets venant de domaines différents, elle ne permet pas de spécifier les objets au delà d'un certain niveau. Dans le domaine de l'archéologie par exemple, les amphores sont classées suivant différentes typologies comme par exemple Dressel [35] et Py [71]. Il est impossible de représenter ces typologies comme des concepts de notre taxinomie car toutes les amphores possèdent les mêmes attributs morphologiques. Le critère de différenciation entre les amphores n'est pas la présence ou non de certains attributs mais leur valeur. Là où une Dressel 7 est datée entre 30 Av. JC. et 75 Ap. JC. et à un diamètre de col de 10 à 15 cm [83], une Beltran 2A à une datation allant de 10 à 150 Ap. JC. et un diamètre de col d'environ 20 cm [58]. L'exemple précédent est très simplifié, la classification des amphores prends en compte un très grand nombre de critères comme leur utilité, leur mode de fabrication, les zones géographiques dans laquelle elles ont été utilisée. Notre taxinomie est incapable d'exprimer une telle classification car les critères déterminants sont complètement liés au domaine de recherche et les intégrer est incompatible avec la relation de hiérarchisation que nous utilisons. Afin de résoudre ce problème, nous avons défini la notion de typologie. La typologie d'un objet mesurable est un ensemble de domaines de valeurs et de valeurs par défaut pour les attributs d'un objet dans son domaine de recherche. Une typologie n'est pas un concept au sens de notre taxinomie mais elle permet de caractériser un objets en servant de lien avec le domaine de recherche impliqué. La figure 10.9 illustre la limite de notre taxinomie est son extension grâce aux typologies. Tous les objets caractérisée par la typologie *Dressel 20* ou *Py 4* sont bien des objets du concept *Amphore*, cependant, d'un point de vue purement taxinomique, il est impossible de discerner des *Dressel 20* des *Py 4*. Si nous nous plaçons dans le modèle Objet en associant à chaque concept de la taxinomie une classe, la classe *Amphore* est une sous-classe d'*Item Mesurable*. En revanche, *Dressel 20* n'est pas une sous classe d'*Amphore* car l'intégration de la typologie dans la caractérisation d'un objet est faite lors de son instanciation, selon sa définition dans le modèle Objet. La typologie peut être vue comme un paramètre de l'instanciation de l'objet qui spécifie des valeurs d'attributs par défaut. Ces valeurs étant issues de la connaissance du domaine.

## 10.5 Contraintes sur les objets

La typologie d'un objet est basée sur la notion de valeurs d'attributs par défaut et de domaines de valeur. Il est possible de représenter les domaines de valeurs par des contraintes sur les objets. Nous pouvons illustrer ceci par l'exemple des amphores de typologie *Py 4* qui ont des dates de fabrications contenues dans un certain intervalle. De même les variations de leurs valeurs métrologiques sont soumises à des domaines connus. Un objet est alors caractérisé par une typologie si et seulement si les valeurs de ses attributs sont bien contenues dans les domaines définis. Afin de contrôler la validité des attributs d'un objet pour lequel on possède une



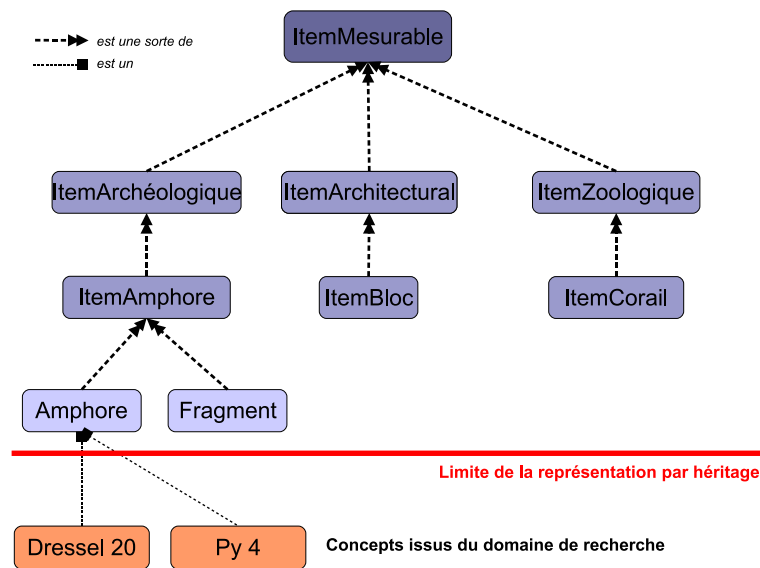


FIG. 10.9 – Limite de la représentation taxinomique.

typologie, nous définissons des contraintes appelées contraintes intrinsèques. Pour qu'un objet soit considéré comme cohérent intrinsèquement, il doit satisfaire toutes les contraintes intrinsèques s'y rapportant. Pour une amphore de la typologie *Dressel 7*, nous pouvons citer comme contraintes intrinsèques par exemple [83] :

- « Une amphore *Dressel 7* à un diamètre de col dont la valeur maximale est  $15\text{cm}$  »
- « Une amphore *Dressel 7* à un diamètre de col dont la valeur minimale est  $10\text{cm}$  »

Tout comme les objets sont organisés en taxinomies, les contraintes intrinsèques le sont également. Un objet d'un concept  $C$  sous-concept de  $A$  doit satisfaire les contraintes intrinsèques relative à  $C$  mais aussi les contraintes relatives à  $A$  s'il en existe. Par exemple, une contrainte intrinsèque générale à tous les objets mesurés est : « La longueur d'un objet mesurable est positive ». Que l'objet soit une amphore *Py 4* ou une colonnie de corail, cette contrainte doit être respectée.

### 10.5.1 Relations entre les objets et contraintes sur les relations

La conceptualisation d'un domaine est la description des objets ne se limite pas à la description des attributs et des contraintes sur les attributs. Certains concepts peuvent être en relation avec d'autres. Lors de la définition d'un concept, les attributs peuvent être simples, comme des valeurs numériques, littérales, ou des valeurs complexes, comme des documentations archéologiques ou encore des modèles géométriques.

La définition de relations entre des concepts est incluse dans de nombreux formalismes. Ces relations peuvent être de deux types : les relations entre concepts et les relations entre instances. Notre taxinomie intègre déjà comme relation entre concepts la relation d'héritage. La définition même des concepts comprend également des relations de méronymie qui permettent de considérer des concepts comme étant eux-mêmes attribut d'un autre concept. Par exemple, un item mesurable possède un attribut de position dans l'espace étant lui-même un concept composé des attributs de positions (un vecteur  $(x, y, z)$  et trois angles  $(\omega, \phi, \kappa)$ ). Les relations de taxinomie est de méronymie caractérisent les concepts de notre représentation et sont toujours obligatoirement vérifiées par toutes les instances de concepts. Nous pouvons cependant enrichir cette représentation avec des relations entre les instances. Ces relations peuvent être vérifiées ou non par les instances d'un concept sans que cela n'entraîne l'appartenance ou non d'un objet à un concept. Un exemple de relation entre instance est la relation *nomIdentique*. Deux objets d'un concept  $C$  peuvent vérifier ou non cette relation sans que cela veuille dire quoi que ce soit sur l'appartenance des deux objets au concept  $C$ . Cependant, comme les contraintes intrinsèques permettent de spécifier la caractérisation d'un objet par une typologie, des contraintes sur les relations, ou contraintes extrinsèques, permettent la même chose. Nous pouvons définir formellement

toutes ces notions.

## 10.6 Représentation des connaissances dans Arpeur

La représentation des connaissances au sein du projet Arpeur est une extension de la représentation conceptuelle. Deux aspect distincts de la représentation sont à prendre en compte :

- L'aspect Intrinsèque.
- L'aspect Extrinsèque.

L'aspect intrinsèque définit les objets étudiés. Il est composé de l'ensemble des concepts avec les relations d'héritage, de caractérisation et d'agrégation ainsi que de contraintes sur les attributs et de valeurs par défaut. En effet, la représentation conceptuelle permet de décrire les propriétés des entités étudiées mais pas de leur donner des valeurs à priori ou encore de restreindre les valeurs qu'elles peuvent prendre. Dans le cadre de la mesure fondée sur la connaissance, de nombreuses propriétés peuvent avoir des valeurs par défaut ou ne peuvent prendre certaines valeurs.

Formellement, une Entité arpeur est un ensemble noté  $\mathcal{E} = \{\mathcal{C}, \mathcal{V}_d, \mathcal{C}^I, \mathcal{R}, \mathcal{C}^E\}$  défini tel que :

1.  $\mathcal{C}$  est un concept.
2.  $\mathcal{V}_d$  est un ensemble de valeurs par défaut pour ses attributs.
3.  $\mathcal{C}^I$  est un ensemble de contraintes sur les attributs.
4.  $\mathcal{R}$  est un ensemble de relations entre objets de  $\mathcal{C}$ .
5.  $\mathcal{C}^E$  est un ensemble de contraintes sur relations de  $\mathcal{R}$ .

Chaque objet caractérisé par une entité  $\mathcal{E}$  est nécessairement une instance de la classe  $\mathcal{C}$ . Les composantes 1, 2 et 3 forment la partie individuelle de l'entité. En effet, celles-ci ne concernent qu'un objet à la fois. Les composantes 4 et 5 s'appliquent uniquement à des ensembles d'objets elles forment la partie collective de l'entité. La figure 10.10 illustre la composition du modèle Arpeur. La correspondance entre un ensemble

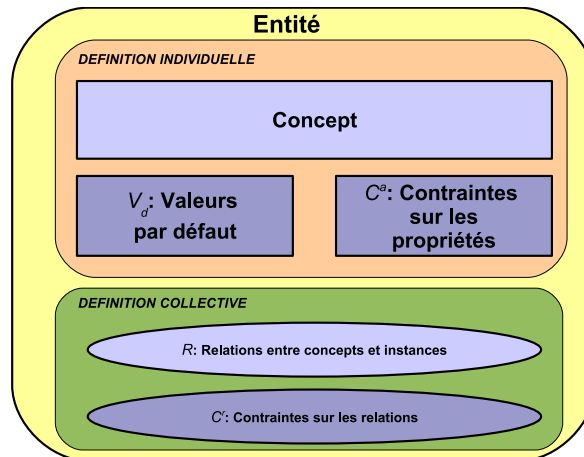


FIG. 10.10 – Le modèle conceptuel Arpeur.

d'objet  $O$  et une entité est appelée caractérisation. Une entité caractérise un ensemble  $O$  si et seulement si les éléments suivants sont vérifiés :

- Tous les éléments de  $o_i$  de  $O$  sont des instances de la classe  $\mathcal{C}$  ;
- Le processus d'instanciation a initialisé les attributs de  $o_i$  avec les valeurs de  $\mathcal{V}_d$
- Il existe une fonction  $f^a$  permettant de vérifier si tout objet  $o_i$  de  $O$  vérifie la contrainte sur les attributs  $c_k^I$  de  $\mathcal{C}^I$ .
- Il existe une fonction  $f^r$  permettant de vérifier si tout objet  $o_i$  de  $O$  vérifie la contrainte sur les attributs  $c_l^E$  de  $\mathcal{C}^E$ .

Il est possible de dissocier deux caractérisations correspondantes aux deux aspects de l'entité. Un objet unique  $o$  est caractérisé intrinsèquement par une entité  $\mathcal{E}$  si et seulement il est de la classe  $\mathcal{C}$  et si il respecte les contraintes sur les attributs de  $\mathcal{C}^a$ . Plus formellement :

**Définition 89** Soit  $\mathcal{E} = \{\mathcal{C}, \mathcal{V}_d, \mathcal{C}^I, \mathcal{R}, \mathcal{C}^E\}$  une entité et soit  $o$  un objet. L'entité  $\mathcal{E}$  caractérise intrinsèquement l'objet  $o$  si et seulement si :

- $o$  est une instance de  $\mathcal{C}$
- $\forall c_k^I \in \mathcal{C}^I, c_k^I(o)$  est vérifiée.

De même, une entité  $\mathcal{E}$  caractérise un ensemble d'objet  $O$  si tous les objets  $o_i$  de  $O$  sont caractérisés individuellement par  $\mathcal{E}$  et si toutes les contraintes sur les relations de  $\mathcal{C}^r$  sont vérifiées pour tous les couples formés par deux objets  $(o_i, o_j)$ . Plus formellement :

**Définition 90** Soit  $\mathcal{E} = \{\mathcal{C}, \mathcal{V}_d, \mathcal{C}^I, \mathcal{R}, \mathcal{C}^E\}$  une entité et soit  $O$  un ensemble d'objets. L'entité  $\mathcal{E}$  caractérise l'ensemble d'objets  $O$  si et seulement si :

- $\forall o_i \in O, \mathcal{E}$  caractérise individuellement  $o_i$ .
- $\forall (o_i, o_j) \in O \times O, \forall c_l^E \in \mathcal{C}^E, c_l^E(o_i, o_j)$ .

Par abus de langage, nous pouvons restreindre une entité à sa partie intrinsèque. Dans ce cas là, un objet  $o$  est caractérisé par une entité si et seulement si les trois premières propriétés sont vérifiées.

# Chapitre 11

## Fusion d'objets caractérisés par des entités

### Contents

---

<b>11.1 Cohérence et Formalisation de la connaissance . . . . .</b>	<b>146</b>
11.1.1 Cohérence d'un ensemble d'objets . . . . .	146
11.1.2 Formalisation en logique des prédicats instanciés . . . . .	148
<b>11.2 Construction des ensembles <math>\mathcal{E}</math>-incohérents . . . . .</b>	<b>150</b>
11.2.1 Méthode matricielle . . . . .	150
11.2.2 Méthode basée sur la revision de croyances . . . . .	153
<b>11.3 Formalisation de la fusion d'ensembles d'objets . . . . .</b>	<b>156</b>
<b>11.4 Restauration de la cohérence d'un ensemble d'objets . . . . .</b>	<b>157</b>
11.4.1 Fusion prudente . . . . .	157
11.4.2 Fusion avec priorité entre les objets et les ensembles d'objets . . . . .	158
11.4.3 Pré-ordre global pour les objets . . . . .	159
11.4.4 Restauration de cohérence manuelle . . . . .	162
11.4.5 Restauration de cohérence automatisée . . . . .	162

---

## Introduction

Nous proposons maintenant d'utiliser les techniques développées dans le cadre propositionnel afin de mettre en place des processus de fusion d'ensembles d'objets mesurée. Ce travail est basé sur la notion d'ensembles d'incohérence et de restauration de cohérence. Nous décrivons tout d'abord une représentation des entités en logique des prédicats instanciée utilisée pour définir la notion de cohérence d'un ensemble d'objets. Cette notion nous permet de construire des ensembles d'incohérence pointant les objets apportant l'incohérence lors de l'agrégation de plusieurs relevés. Deux méthodes de construction des ensembles sont présentées, l'une matricielle, l'autre basée sur les R-ensembles [65]. Nous présentons ensuite une formalisation de la fusion d'ensembles d'objets à partir des ensembles d'incohérence. Pour cela, Nous proposons trois techniques de rétablissement de cohérence : une méthode automatique, une méthode manuelle et une méthode hybride (ou automatisée).

Cette partie est composée de trois chapitres. Le chapitre 9 présente tout d'abord un bref état de l'art sur la photogrammétrie, son historique et ses principes. L'organisation de l'outil Arpenteur et son fonctionnement sont ensuite décrits. Le chapitre 10 apporte une nouvelle représentation des connaissances mise en place au sein d'arpenteur. Cette représentation, appelée représentation par entité, est issue de la représentation initiale d'Arpenteur étendue grâce à la notion de contraintes intrinsèques et extrinsèques. Le chapitre 11 illustre l'application du cadre de fusion réversible développé au chapitre ?? à la représentation par entité. Il est composé d'une formalisation en logique des prédicats instanciés d'un ensemble d'objets représentés par des entités, de la proposition de deux méthodes de détection d'incohérence à partir de cette nouvelle formalisation et de la mise en place de trois méthodes de fusion utilisables : La fusion automatique, la fusion manuelle et la fusion automatisée.

## 11.1 Cohérence et Formalisation de la connaissance

La gestion des objets mesurés lors de l'étude d'un site dépend de plusieurs facteurs. Les mesures sont étalées dans le temps, plusieurs acteurs participent aux différentes phases de mesures et l'utilisation d'informations souvent hétérogènes sont trois facteurs pouvant entraîner des incohérences dans les ensembles d'objets mesurés. La cohérence d'un ensemble d'objets mesurés est le respect de l'objet mesuré suivant une entité construite à partir de la connaissance experte (voir chapitre 10).

Nous proposons maintenant une méthode permettant de déterminer si l'union de plusieurs ensembles d'objets est cohérente. La représentation utilisée est celle des objets basée sur les entités définie en 10. Nous rappelons qu'une entité  $\mathcal{E} = \{\mathcal{C}, \mathcal{V}_d, \mathcal{C}^I, \mathcal{R}, \mathcal{C}^E\}$  est composée :

1. D'une classe d'objets  $\mathcal{C}$ .
2. D'un ensemble  $\mathcal{V}_d$  de valeurs par défaut pour les attributs de  $\mathcal{C}$ .
3. De l'ensemble  $\mathcal{C}^I$  des contraintes sur les attributs.
4. De l'ensemble  $\mathcal{R}$  des relations entre objets de  $\mathcal{C}$ .
5. De l'ensemble  $\mathcal{C}^E$  des contraintes sur relations de  $\mathcal{R}$ .

Chaque objet caractérisé par une entité  $\mathcal{E}$  est nécessairement une instance de la classe  $\mathcal{C}$ . Les composantes 1, 2 et 3 forment la partie intrinsèque de l'entité. En effet, celles-ci ne concernent qu'un objet à la fois. Les composantes 4 et 5 s'appliquent uniquement à des ensembles d'objets elles forment la partie extrinsèque de l'entité. La première étape dans le traitement d'ensembles d'objets caractérisés par une entité est la définition de la cohérence.

### 11.1.1 Cohérence d'un ensemble d'objets

Soit  $O = \{o_1, \dots, o_n\}$  un ensemble d'objets caractérisé par l'entité  $\mathcal{E}$ . La cohérence de l'ensemble  $O$  est scindée en deux composantes : la cohérence intrinsèque de l'objet et la cohérence extrinsèque de l'ensemble d'objets, cette composition reflétant la composition intrinsèque / extrinsèque de l'entité. La cohérence d'un objet s'exprime par la satisfaction de toutes les contraintes sur ses attributs.

**Définition 91** Soit  $O$  un ensemble d'objets caractérisé par l'entité  $\mathcal{E} = \{C, \mathcal{V}_d, C^I, \mathcal{R}, C^E\}$ . Un objet  $o_i$  de  $O$  est cohérent intrinsèquement par rapport à  $\mathcal{E}$  si et seulement si :

$$\forall c_k^I \in C^I, c_k^I(o_i) \text{ est vérifiée}^1.$$

De la même manière, la cohérence d'un ensemble d'objets  $O$  s'exprime par la satisfaction des contraintes sur les relations par tous les sous ensembles de  $O$ . Formellement :

**Définition 92** Soit  $O$  un ensemble d'objets caractérisé par  $\mathcal{E} = \{C, \mathcal{V}_d, C^I, \mathcal{R}, C^E\}$ . L'ensemble  $O$  est cohérent extrinsèquement par rapport à  $\mathcal{E}$  si et seulement si :

$$\forall c_l^E \in C^E, \forall (o, o') \in O \times O, c_l^E(o, o') \text{ est vérifiée}^2.$$

Par souci de lisibilité, nous utilisons le terme cohérence sans préciser la nature intrinsèque ou extrinsèque de celle-ci, le contexte permettant de faire la différence. A partir des deux définitions précédentes, nous pouvons définir la cohérence d'un ensemble d'objets par rapport à une entité.

**Définition 93** Soit  $O$  un ensemble d'objets caractérisé par  $\mathcal{E}$ . L'ensemble  $O$  est cohérent par rapport à  $\mathcal{E}$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $\forall o_i \in O, o_i$  est cohérent intrinsèquement par rapport à  $\mathcal{E}$  ;
- $O$  est cohérent extrinsèquement par rapport à  $\mathcal{E}$ .

L'ensemble  $O$  est alors défini comme  $\mathcal{E}$ -cohérent.

L'exemple suivant illustre le principe de  $\mathcal{E}$ -cohérence d'un ensemble d'objets.

**Exemple 26** Soit  $O = \{o_1, o_2, o_3\}$  un ensemble d'objets caractérisé par l'entité  $\mathcal{E} = \{C, \mathcal{V}_d, C^I, \mathcal{R}, C^E\}$  définie par :

- $C$  une classe qui a pour attributs une hauteur, un nom et une localisation notés respectivement  $h$ ,  $n$  et  $l$  ;
- $\mathcal{V}_d$  un ensemble de valeurs par défaut pour les attributs  $h = 0$ ,  $l = (0, 0, 0)$  et  $n = \text{inconnu}$  ;
- $C^I$  contient la contrainte  $c_h^I$  qui est vérifiée si et seulement si la hauteur d'un objet est non nulle. Plus formellement<sup>3</sup>,  $c_h^I(o)$  est vérifiée si et seulement si  $o.h > 0$ .

Les relations composant  $\mathcal{R}$  sont  $r_n$  et  $r_l$  définies par :

- $r_n(o, o')$  si et seulement si deux objets  $o$  et  $o'$  ont même nom, ce qui se traduit par  $o.n = o'.n$  ;
- $r_l(o, o')$  si et seulement si deux objets  $o$  et  $o'$  ont même localisation, ce qui s'écrit  $o.l = o'.l$ .

Les contraintes sur les relations formant l'ensemble  $C^E$  sont telles que :

- $c_n^E(o, o')$  est vérifiée si et seulement si deux objets  $o$  et  $o'$  n'ont pas le même nom. Ceci est vérifié si la relation  $r_n(o, o')$  n'est pas satisfaite.
- $c_l^E(o, o')$  est vérifiée si et seulement si deux objets  $o$  et  $o'$  n'ont pas même localisation. Ceci est vérifié si la relation  $r_l(o, o')$  n'est pas satisfaite.

Ces relations et contraintes sont instanciées sur un ensemble d'objets. Soit  $O = \{o_1, o_2, o_3\}$  l'ensemble d'objets issu des observations du tableau 11.1. Les contraintes  $c_h^I(o_2)$  et  $c_h^I(o_3)$  sont vérifiées mais pas  $c_h^I(o_1)$ .

	$o_1$	$o_2$	$o_3$
$n$	$id_1$	$id_2$	$id_2$
$h$	0.0	12.543	9.318
$l$	(12.5, 1.0, 5.4)	(12.5, 1.0, 5.4)	(8.3, 4.0, -2.4)

TAB. 11.1 – Objets et leurs attributs.

Les relations  $r_n(o_2, o_3)$  et  $r_l(o_1, o_2)$  étant satisfaites, les contraintes  $c_n^E(o_2, o_3)$  et  $c_l^E(o_1, o_2)$  sont violées. Les contraintes  $c_n^E(o_1, o_2)$ ,  $c_n^E(o_1, o_3)$  mais aussi  $c_l^E(o_1, o_3)$  et  $c_l^E(o_2, o_3)$  sont vérifiées.

<sup>1</sup>L'indice  $k$  permet d'identifier de manière unique une contrainte intrinsèque.

<sup>2</sup>L'indice  $l$  permet d'identifier de manière unique une contrainte binaire.

<sup>3</sup>Nous utilisons la notation Objet standard ou le . est opérateur d'accès aux attributs.

Si un ensemble d'objet  $O$  est  $\mathcal{E}$ -incohérent, nous définissons deux ensembles d' $\mathcal{E}$ -incohérences permettant de déterminer les objets apportant l'incohérence et de les lier aux contraintes violées. Ces ensembles permettent non seulement de déterminer si un ensemble d'objets est incohérent, mais aussi d'exprimer les raisons de l'incohérence par rapport à  $\mathcal{E}$ .

**Définition 94** Soit  $O$  un ensemble d'objets caractérisé par l'entité  $\mathcal{E}$ . L'ensemble  $\Theta^I$  d'incohérence intrinsèque est un ensemble de couples défini par :

- $\Theta^I(O) = \emptyset$  Si  $O$  est cohérent intrinsèquement.
- $\Theta^I(O) = \{(O', c_k^I) \mid O' \subseteq O, o \in O', c_k^I \in C^I, c_k^I(o) \text{ n'est pas vérifiée}\}.$

La notion d'ensemble d'incohérence extrinsèque est définie de même par :

**Définition 95** Soit  $O$  un ensemble d'objets caractérisé par l'entité  $\mathcal{E}$ . L'ensemble  $\Theta^E$  d'incohérence extrinsèque est un ensemble de couples défini par :

- $\Theta^E(O) = \emptyset$  Si  $O$  est cohérent extrinsèquement.
- $\Theta^E(O) = \{((o, o'), c_l^E) \mid (o, o') \in O \times O, c_l^E \in C^E, c_l^E(o, o') \text{ n'est pas vérifiée}\}.$

L'expression de la cohérence d'un ensemble d'objets maintenant définie, nous en proposons une formalisation en logique des prédicats instanciés sur un domaine fini comme décrit en section 2.2, page 20.

### 11.1.2 Formalisation en logique des prédicats instanciés

Le choix de l'utilisation de la logique des prédicats instanciés sur un domaine fini est motivé par sa simplicité d'expression ainsi que sa décidabilité sur le domaine d'instanciation, défini ici comme l'ensemble des objets mesurés. Nous utilisons des prédicats pour représenter les contraintes sur les attributs et les contraintes sur les relations. Formellement, soit  $O$  un ensemble d'objets caractérisé par l'entité  $\mathcal{E} = \{\mathcal{C}, \mathcal{V}_d, C^I, \mathcal{R}, C^E\}$ . Nous représentons une contrainte  $c_k^I \in C^I$  par un prédicat unaire noté  $p_k^I$ . La sémantique est telle que :

$$\forall o \in O, p_k^I(o) \text{ est satisfait ssi } c_k^I(o) \text{ est vérifiée.}$$

L'ensemble des prédicats unaires représentant les contraintes sur les attributs est noté  $\mathcal{PC}^I$ . L'instanciation de cet ensemble sur l'ensemble  $O$  est notée  $\mathcal{PC}^I(O)$ .

De la même manière, une relation binaire entre objets  $r \in \mathcal{R}$  s'exprime par un prédicat binaire noté  $p^E$ . La sémantique des  $p_h^E$  est telle que :

$$\forall (o, o') \in O \times O, p_h^E(o, o') \text{ est satisfait ssi } r_h(o, o') \text{ est vérifiée}^4.$$

L'ensemble des prédicats représentant les relations entre les objets et noté  $\mathcal{PR}$ . L'instanciation de cet ensemble sur l'ensemble  $O$  est notée  $\mathcal{PR}(O)$ .

Une contrainte  $c_l^E$  est représentée par une formule, notée  $f_l^E$ , contruite à partir des prédicats de  $\mathcal{PR}$ . La sémantique utilisée est telle que :

$$\forall (o, o') \in O \times O, f_l^E(o, o') \text{ est satisfaite ssi } c_l^E(o, o') \text{ est vérifiée.}$$

L'ensemble des formules représentant les contraintes sur les relations est noté  $\mathcal{PC}^E$ . L'instanciation de cet ensemble sur l'ensemble  $O$  est notée  $\mathcal{PC}^E(O)$ .

Dans la mesure où les contraintes sont exprimées de manière logique, le passage de la contrainte à la formule est simplifié. Cependant, si des contraintes sont trop complexes ou difficiles à représenter, un travail de traduction doit être effectué. Celui-ci peut être réalisé avec la collaboration de l'expert ayant énoncé les contraintes. La solution la mieux adaptée à notre problème est alors de mettre en place un protocole d'expression des contraintes qui tout en étant assez souple pour l'expert définissant les contraintes, permet une traduction systématique en formule du premier ordre. Dans notre exemple, les contraintes sur les relations sont exprimées comme indiqué dans l'exemple suivant.

<sup>4</sup>L'indice  $h$  permet d'identifier de manière unique une relation

	$o_1$	$o_2$	$o_3$
$n$	$id_1$	$id_2$	$id_2$
$h$	0.0	12.543	9.318
$l$	(12.5, 1.0, 5.4)	(12.5, 1.0, 5.4)	(8.3, 4.0, -2.4)

TAB. 11.2 – Objets et leurs attributs.

**Exemple 27** A partir de l'exemple 26 page 147, les prédicats unaires instanciés représentant les contraintes sur les attributs de  $C^I$  sont :  $\neg p_h^I(o_1)$ ,  $p_h^I(o_2)$ ,  $p_h^I(o_3)$ . L'ensemble des prédicats représentant les relations entre les objets est  $\mathcal{PR} = \{p_n^E, p_l^E\}$ . Son instanciation sur  $O$  donne :

$$\mathcal{PR}(O) = \{ \neg p_n^E(o_1, o_2), p_n^E(o_2, o_3), \neg p_n^E(o_1, o_3), \\ p_l^E(o_1, o_2), \neg p_l^E(o_2, o_3), \neg p_l^E(o_1, o_3) \}$$

L'ensemble des formules représentant les contraintes sur les relations est  $\mathcal{PC}^E = \{f_n^E, f_l^E\}$  avec  $\forall o_i, o_j \in O, i \neq j, f_n^E(o_i, o_j) = \neg p_n^E(o_i, o_j)$  et  $f_l^E(o_i, o_j) = \neg p_l^E(o_i, o_j)$ . L'instanciation sur  $O$  donne :

$$\mathcal{PC}^E(O) = \{ f_n^E(o_1, o_2), \neg f_n^E(o_2, o_3), f_n^E(o_1, o_3), \\ \neg f_l^E(o_1, o_2), f_l^E(o_2, o_3), f_l^E(o_1, o_3) \}$$

Grâce à la représentation en logique des prédicats, la cohérence d'un ensemble d'objets par rapport à une entité peut être exprimée par la cohérence logique. Formellement :

**Proposition 20** Soit  $O$  un ensemble d'objets caractérisé par l'entité  $\mathcal{E}$ .

L'ensemble  $O$  est cohérent intrinsèquement si et seulement si  $\mathcal{PC}^I$  est satisfait pour tout  $o_i \in O$  ;

L'ensemble  $O$  est cohérent extrinsèquement si et seulement si  $\mathcal{PC}^E$  est satisfait pour tout couple  $(o_i, o_j) \in O \times O, o_i \neq o_j$  ;

L'ensemble  $O$  est cohérent si et seulement si  $\mathcal{PC}^I \cup \mathcal{PC}^E$  est satisfait par  $O$ .

Cette proposition est évidente, en effet, par définition,  $\forall o_i \in O, c_k^I(o_i) = p_k^I(o_i)$  et  $\forall (o_i, o_j) \in O \times O, c_l^E(o_i, o_j) = f_l^E(o_i, o_j)$ . Une conséquence de cette proposition est qu'un ensemble d'objets  $O$  est incohérent si  $\mathcal{PC}^I(O) \cup \mathcal{PC}^E(O)$  n'est pas satisfait. Par le théorème de compacité de la logique des prédicats, il existe au moins un sous ensemble  $O'$  de  $O$  tel que  $\mathcal{PC}^I(O') \cup \mathcal{PC}^E(O')$  n'est pas satisfait. Il s'agit donc de déterminer les sous ensembles de  $O$  qui violent les contraintes de  $C^I$  et  $C^E$  ce qui nous ramène à un problème de détection des objets apportant l'incohérence.

**Exemple 28** Reprenons l'exemple 27 dans lequel  $O = \{o_1, o_2, o_3\}$  est un ensemble d'objets caractérisé par l'entité  $\mathcal{E} = \{C, \mathcal{V}_d, C^I, \mathcal{R}, C^E\}$  de l'exemple 27. Les valeurs d'attributs sont représentées dans le tableau 11.2. Nous avons l'ensemble des prédicats unaires :

$$\mathcal{PC}^I(O) = \{\neg p_h^I(o_1), p_h^I(o_2), p_h^I(o_3)\}$$

et l'ensemble des formules binaires :

$$\mathcal{PC}^E(O) = \{ f_n^E(o_1, o_2), \neg f_n^E(o_2, o_3), f_n^E(o_1, o_3), \\ \neg f_l^E(o_1, o_2), f_l^E(o_2, o_3), f_l^E(o_1, o_3) \}$$

Le prédicat  $p_h^I(o_1)$  ainsi que les formules  $f_n^E(o_2, o_3)$  et  $f_l^E(o_1, o_2)$  ne sont pas satisfaites. L'ensemble  $O$  n'est donc pas cohérent. Les sous ensembles  $\{o_1\}$ ,  $\{o_1, o_2\}$ ,  $\{o_2, o_3\}$  et  $\{o_1, o_2, o_3\}$  sont incohérents.

L'exemple précédent montre qu'il est possible de retrouver les ensembles d'objets incohérents. En effet, la formule  $f_n^E(o_2, o_3)$  spécifie que le couple d'objets  $(o_2, o_3)$  viole la contrainte  $c_n^E$ . La formule  $f_l^E(o_1, o_2)$  indique que le couple d'objets  $(o_1, o_2)$  viole la contrainte  $c_l^E$ . Le prédicat  $\neg p_h^I(o_1)$  stipule que  $o_1$  viole la contrainte  $c_h^I$ . En effet, les objets provenant d'un processus de mesure complexe, il est préférable d'utiliser



une approche automatisée - et non automatique - pour rétablir l'incohérence. Les objets issus du processus de mesure peuvent être incohérents suite à des facteurs inaccessibles pour un outil de traitement automatique. Par exemple, si une erreur est survenue durant la mesure, de nombreuses erreurs peuvent alors se produire en cascade. Le seul moyen de correction est alors pour l'expert de soumettre à nouveau l'objet au protocole de mesure. Grâce au théorème de compacité de la logique des prédicats, il est possible de construire les ensembles d'incohérence  $\Theta^I$  et  $\Theta^E$ . Nous proposons ici deux méthodes de construction des ensembles  $\Theta^I$  et  $\Theta^E$ . La première est basée sur un calcul matriciel, la seconde utilise le principe de la révision. [11].

## 11.2 Construction des ensembles $\mathcal{E}$ -incohérents

Nous présentons maintenant deux méthodes de construction des ensembles  $\mathcal{E}$ -incohérents. La première est basée sur une méthode matricielle développée spécifiquement pour notre cadre de travail. La seconde est issue d'une adaptation de la technique de détection d'incohérence par les R-ensembles pour lesquels des algorithmes performants ont été développés et testés dans le cadre de la gestion d'informations géographiques [10] [11].

### 11.2.1 Méthode matricielle

Soit  $O = \{o_1, \dots, o_n\}$  un ensemble d'objets et soit  $\mathcal{PC}^I = \{p_1^I, \dots, p_t^I\}$  et  $\mathcal{PC}^E = \{f_1^E, \dots, f_v^E\}$  respectivement l'ensemble des prédicats représentant l'ensemble des contraintes intrinsèques  $C^I$  et l'ensemble des formules représentant l'ensemble  $C^E$  des contraintes sur les relations. La détermination des  $\mathcal{E}$ -incohérences a pour but de vérifier si l'ensemble  $O$  est cohérent et dans le cas contraire, de déterminer tous les sous ensembles de  $O$  incohérents et de les associer aux contraintes qu'ils violent. D'après la proposition 20, l'ensemble  $O$  est cohérent si et seulement si  $\mathcal{PC}^I \cup \mathcal{PC}^E$  est satisfait par l'ensemble  $O$ .

#### Satisfaction de $\mathcal{PC}^I$

L'ensemble  $\mathcal{PC}^I = \{p_1^I, \dots, p_t^I\}$  est satisfait par l'ensemble  $O$  si et seulement si pour chaque objet  $o \in O$  tous les prédicats unaires  $p_k^I \in \mathcal{PC}^I$  sont satisfaits. Afin d'exprimer la satisfaction de l'ensemble de prédicats  $\mathcal{PC}^I$  nous calculons pour chaque objet  $o$  un vecteur de satisfaction  $V^I(o_i) = (v_1^I(o_i), \dots, v_t^I(o_i))$  défini par :

$$\forall p_k^I \in \mathcal{PC}^I : \begin{array}{l} - v_k^I(o_i) = 1 \text{ si } p_k^I(o_i) \text{ est satisfait} \\ - v_k^I(o_i) = 0 \text{ sinon.} \end{array}$$

La construction du vecteur  $V^I$  est telle qu'un objet  $o_i$  satisfait  $\mathcal{PC}_a$  si et seulement si toutes les composantes de  $V^I(o_i)$  valent 1. Si tous les objets de  $O$  sont tels que  $V_{o_i}^I$  vérifie la proposition précédente,  $\mathcal{PC}^I(O)$  est satisfait et d'après la proposition 20, l'ensemble  $O$  est cohérent intrinsèquement. Si  $\mathcal{PC}_a$  n'est pas satisfait, nous déterminons les ensembles d'objets incohérents en construisant l'ensemble  $\Theta^I$  d'incohérence intrinsèque. Pour un objet  $o_i$ , Chaque composante  $v_k^I(o_i)$  de  $V^I(o_i)$  représente le prédicat instancié  $p_k^I(o_i)$ . En étudiant tous les vecteurs associés à tous les objets de  $O$  il est simple de retrouver les couples qui composent  $\Theta^I(O)$ . En effet, soit  $V^I(o_i) = (v_1^I(o_i), \dots, v_t^I(o_i))$  un vecteur. Si une composante  $v_k^I(o_i)$  est égale à 0, par construction de  $V^I(o_i)$  nous déduisons que l'objet  $(o_i)$  ne satisfait pas le prédicat  $p_k^I$ . Le couple  $(o_i, p_k^I)$  est alors ajouté à  $\Theta^I$ .

#### Satisfaction de $\mathcal{PC}^E$

De manière similaire à la cohérence intrinsèque,  $\mathcal{PC}^E = \{f_1^E, \dots, f_v^E\}$  est cohérent si et seulement si pour chaque couple d'objets  $(o, o')$ ,  $(o, o') \in O \times O$  toutes les formules  $f_l^E \in \mathcal{PC}^E$  sont vérifiées. Comme pour le cas intrinsèque, nous calculons pour chaque couple  $(o, o')$  un vecteur de satisfaction  $V^E(o, o') = (v_1^E(o, o'), \dots, v_v^E(o, o'))$  défini par :

$$\forall f_l^E \in \mathcal{PC}^E : \begin{array}{l} - v_l^E(o, o') = 1 \text{ si } f_l^E(o, o') \text{ est satisfait} \\ - v_l^E(o, o') = 0 \text{ sinon.} \end{array}$$

Un couple d'objets  $(o, o')$  satisfait  $\mathcal{PC}^E$  si et seulement si toutes les composantes  $v_l^E(o, o')$  de  $V^E(o, o')$  valent 1. Si tous les couples issus de  $O$  vérifient cette condition, alors  $\mathcal{PC}^E$  est satisfait et d'après la proposition 20,

$O$  est cohérent extrinsèquement. Si  $\mathcal{PC}^E$  n'est pas satisfait, nous déterminons l'ensemble  $\Theta^E$  d'incohérences extrinsèque. Pour un couple d'objets  $(o, o')$ , chaque composante  $v_l^E(o, o')$  de  $V^E(o, o')$  représente la formule instanciée  $f_l^E(o, o')$ . En étudiant tous les vecteurs associés à tous les couples d'objets de  $O$  nous retrouvons tous les couples composant  $\Theta^E(O)$ . Nous proposons maintenant l'algorithme de calcul des ensembles  $\Theta^I$  et  $\Theta^E$ .

### Algorithme de détermination des $\mathcal{E}$ -incohérences matriciel

Soit  $O$  un ensemble d'objets. Nous proposons maintenant un algorithme permettant de calculer les ensembles  $\Theta^I(O)$  et  $\Theta^E(O)$  en utilisant une approche matricielle. La technique consiste à calculer une matrice  $m_{n, n}$  à deux dimension indexée par les objets de  $O$  dont les éléments sont des entiers définis tel que :

- $m_{i, j} = \sum_{k=1}^t v_k^I \times 2^{k-1}$ ,  $v_k^I \in V^I(o_i)$  si  $i = j$
- $m_{i, j} = \sum_{l=1}^v v_l^E \times 2^{l-1}$ ,  $v_l^E \in V^E(o_i, o_j)$  si  $i \neq j$

La figure 11.1 montre la matrice initialisée. Le parcours de la matrice permet de trouver les objets incohérents

	$o_1$	$o_2$	$o_3$	...	$o_i$	...	$o_n$
$o_1$	$V(o_1)$	$V(o_1, o_2)$	$V(o_1, o_3)$		$V(o_1, o_i)$		$V(o_1, o_n)$
$o_2$	$V(o_2, o_1)$	$V(o_2)$	$V(o_2, o_3)$		$V(o_2, o_i)$		$V(o_2, o_n)$
$o_3$	$V(o_3, o_1)$	$V(o_3, o_2)$	$V(o_3)$		$V(o_3, o_i)$		$V(o_3, o_n)$
...							
$o_i$	$V(o_i, o_1)$	$V(o_i, o_2)$	$V(o_i, o_3)$		$V(o_i)$		$V(o_i, o_n)$
...							
$o_n$	$V(o_n, o_1)$	$V(o_n, o_2)$	$V(o_n, o_3)$		$V(o_n, o_i)$		$V(o_n)$

FIG. 11.1 – Matrice de vecteurs de satisfaction.

intrinsèquement et extrinsèquement grâce à un ensemble de vecteurs de satisfaction et un ensemble de vecteurs modèles. Lorsque des vecteurs sont différents, une incohérence est détectée. Afin d'être efficace, l'algorithme représente les vecteurs au moyen de nombres entiers, chaque bit étant une composante de vecteurs. La comparaison entre les vecteurs de satisfaction et les vecteurs modèles se résume à une opération de comparaison bit à bit. Un vecteur de satisfaction est égal à un vecteur modèle si et seulement si chaque bit  $k$  de l'entier représentant le vecteur de satisfaction est égal au bit  $k$  du vecteur modèle. La construction d'un entier  $I^I(o_i)$  représentant un vecteur de satisfaction  $V^I(o_i) = (v_1^I(o_i), \dots, v_t^I(o_i))$  de  $\mathcal{PC}^I(O)$  telle que :

$$I^I(o_i) = \sum_{k=1}^t v_k^I(o_i) \times 2^{k-1}$$

La construction d'un entier  $I^E(o, o')$  représentant un vecteur de satisfaction  $V^E(o, o') = (v_1^E(o, o'), \dots, v_v^E(o, o'))$  de  $\mathcal{PC}^E(O)$  est telle que :

$$I^E(o, o') = \sum_{l=1}^v v_l^E(o, o') \times 2^{l-1}$$

Les entiers modèles  $I_m^I$  et  $I_m^E$  représentent respectivement les vecteurs modèles de  $\mathcal{PC}^I(O)$  et  $\mathcal{PC}^E(O)$  sont construits de la même façon. La matrice de vecteur de satisfaction se résume alors à une matrice  $m$  d'entiers. Pour chaque case  $m_{i, j}$  de la matrice  $m$ , l'entier contenu est comparé bit à bit avec l'entier  $I_m^I$  si  $i = j$  ou l'entier  $I_m^E$  si  $i \neq j$ . L'opérateur de comparaison bit à bit utilisé est le "et" binaire, noté  $\&$ , opération ayant un très faible coût. La comparaison devient alors :

- $m(i, j) \& I_m^I(o_i) = I_m^I$  si  $i = j$  ;
- $m(i, j) \& I_m^E(o_i, o_j) = I_m^E$  si  $i \neq j$  ;

Si les entiers sont égaux bits à bit, le vecteur de satisfaction étudié est bien un vecteur modèle, sinon, les bits pour lesquels le vecteur de satisfaction diffère du vecteur modèle identifie les composantes des vecteurs différentes et donc les prédicats ou les formules non satisfaites. A partir des prédicats et des indices de la matrice identifiant les objets en cause, les ensembles d'incohérence  $\Theta^I$  et  $\Theta^E$  sont construits. Plus formellement, nous écrivons l'algorithme :

---

**Algorithme 2** : Detection matricielle
 

---

**Data** :  $O$  un ensemble d'objets,  $\mathcal{PC}^I$  un ensemble de contraintes intrinsèques,  $\mathcal{PC}^E$  un ensemble de contraintes extrinsèques  
**Result** :  $(\Theta^I, \Theta^E)$  un couple d'ensembles d'incohérence  
*matrice* une matrice d'entiers  
 $S^I, S^E$  des tableaux d'entiers  
 $o_i, o_j$  des objets  
 $n, i, j, k, l$  des entiers  
 $n \leftarrow 0, k \leftarrow 0$   
 $\Theta^I \leftarrow \emptyset$   
 $\Theta^E \leftarrow \emptyset$   
**while**  $k < u$  **do**  
   $S^I[k] \leftarrow 2^{k-1}$   
   $k \leftarrow k + 1$   
**end**  
 $l \leftarrow 0$   
**while**  $l < v$  **do**  
   $S^E[l] \leftarrow 2^{l-1}$   
   $l \leftarrow l + 1$   
**end**  
 $i \leftarrow 0$   
**while**  $i < n$  **do**  
  **if**  $i = j$  **then**  
     $matrice[i][j] \leftarrow V^I(o_i)$   
  **else**  
     $matrice[i][j] \leftarrow V^E(o_i, o_j)$   
  **end**  
**end**  
 $i \leftarrow 0$   
**while**  $i < n$  **do**  
   $j \leftarrow 0$   
  **while**  $j < n$  **do**  
    **if**  $i = j$  **then**  
       $k \leftarrow 0$   
      **while**  $k < u$  **do**  
        **if**  $S^I[k] \& matrice[i][j] \neq S^I[k]$  **then**  
           $\Theta^I \leftarrow \Theta^I \cup \{(o_i, c_k^I)\}$   
        **end**  
         $k \leftarrow k + 1$   
      **end**  
    **else**  
       $l \leftarrow 0$   
      **while**  $j < v$  **do**  
        **if**  $S^E[l] \& matrice[i][j] \neq S^E[l]$  **then**  
           $\Theta^E \leftarrow \Theta^E \cup \{(o_i, o_j), c_k^E\}$   
        **end**  
         $l \leftarrow l + 1$   
      **end**  
    **end**  
  **end**  
   $i \leftarrow i + 1$   
**end**  
**return**  $(\Theta^I, \Theta^E)$

---

Cet algorithme travaille avec un ensemble d'objets de taille  $n$ . L'ensemble des contraintes sur les attributs est de taille  $t$ , l'ensemble des contraintes sur les relations est de taille  $v$ . L'algorithme est composé de deux parties. La première, l'initialisation, parcourt la matrice en instanciant tous les prédicats unaires et binaires représentant les contraintes sur les attributs et les relations. Cette étape est effectuée en  $n^2$  affectations. Pour chaque objet, le programme calcule  $t$  prédicats unaires (sur la diagonale) et  $n - 1 \times v$  prédicats binaires. Au total, pour chaque objet,  $t + ((n - 1) \times v)$  calculs sont effectués. Le remplissage complet de la matrice est donc effectué en  $n \times (t + ((n - 1) \times v))$  opérations. La deuxième phase parcourt la matrice créée afin de comparer les valeurs des cases avec les entiers de  $S^I$  ou de  $S^E$ . Pour chaque objet il y a  $t$  comparaisons avec des entiers de  $S^I$  et  $(n - 1) \times v$  comparaisons avec des entiers de  $S^E$ . L'affectation ou non d'un couple à l'un des ensembles  $\Theta^I$  ou  $\Theta^E$  n'a pas d'influence sur la complexité. En tout, il y a  $n \times (t + ((n - 1) \times v))$  comparaisons effectuées durant la deuxième phase du calcul. L'algorithme a donc une complexité en  $2 \times (n \times (t + ((n - 1) \times v)))$ . En supposant que  $n$  soit la variable la plus caractéristique (le nombre d'objets est bien supérieur au nombre de contraintes), l'algorithme est donc dans la classe de complexité  $\theta(n^2)$ . Nous présentons maintenant une autre méthode de construction des ensembles  $\Theta^I$  et  $\Theta^E$  basée sur le principe de la révision de croyances [10].

### 11.2.2 Méthode basée sur la revision de croyances

La méthode précédente détermine les ensembles d'incohérence en comparant des vecteurs de satisfaction à des vecteurs modèles pour les ensembles de prédicats et de formules. La notion de vecteur modèle est fournie par la capacité de donner des états dans lesquels devraient se trouver les objets afin d'être cohérents. Cependant, l'ensemble de ces états peut lui aussi être représenté par des ensembles de prédicats et de formules théoriques provenant de la connaissance des experts. Déterminer les ensembles d'incohérence pour ensemble d'objet  $O$  se ramène alors à détecter les prédicats incohérents entre un ensemble de prédicats et de formules théoriques et une ensemble de prédicats et de formules construits à partir de l'ensemble des objets mesurés. L'incohérence peut alors être détectée par une révision des observations par les croyances théoriques. Si les croyances issues de l'observation sont cohérentes avec les croyances théoriques, alors la révision ne détermine aucune incohérence. Dans le cas contraire, l'utilisation des R-Ensembles [66] permet de déterminer les ensembles de formules responsables de l'incohérence.

#### Cohérence d'un ensemble d'objets mesurés.

Soit  $O = \{o_1, \dots, o_n\}$  un ensemble d'objets dont chaque élément  $o_i$  est caractérisé par l'entité  $\mathcal{E} = \{\mathcal{C}, \mathcal{V}_d, \mathcal{C}^I, \mathcal{R}, \mathcal{C}^E\}$ . Comme présenté en 11.1.2, les contraintes sur les attributs sont représentées par des prédicats notés  $p_k^I$  et composent l'ensemble  $\mathcal{PC}^I$ . Les relations sont représentées par des prédicats binaires, notés  $p_h^E$ , composant l'ensemble  $\mathcal{PR}$ . Les contraintes sur les relations sont des formules, notées  $f_l^E$ , composant l'ensemble  $\mathcal{PC}^E$ . Les ensembles  $\mathcal{PC}^I(O)$ ,  $\mathcal{PR}(O)$  et  $\mathcal{PC}^E(O)$  dénotent les ensembles de prédicats ou formules instanciés sur le domaine représenté par l'ensemble  $O$ . D'après la définition 93, un ensemble d'objets est cohérent si et seulement si :

- $\forall o \in O$ ,  $o$  est cohérent intrinsèquement par rapport à  $\mathcal{E}$  ;
- $O$  est cohérent extrinsèquement par rapport à  $\mathcal{E}$ .

Nous ajoutons à cet ensemble la vision théorique des experts. Pour cela, nous définissons deux nouveaux ensembles de contraintes intrinsèques et extrinsèques, les ensembles de contraintes théoriques. L'ensemble des contraintes théoriques intrinsèques est l'instanciation des prédicats de  $\mathcal{PC}^I$  sur  $O$  en imposant que tous les prédicats instanciés soient satisfaits. Plus formellement :

$$\forall p_k^I \in \mathcal{PC}^I, \forall o_i \in O, p_k^I(o_i) \in \mathcal{PC}_T^I(O)$$

De même, nous définissons l'ensemble des contraintes théoriques extrinsèques par :

$$\forall f_l^E \in \mathcal{PC}^E, \forall (o_i, o_j) \in O \times O, f_l^E(o_i, o_j) \in \mathcal{PC}_T^E(O)$$

L'ensemble  $\mathcal{C}_T(O) = \mathcal{PC}_T^I(O) \cup \mathcal{PC}_T^E(O)$  un modèle exprimant la cohérence de l'ensemble  $O$ . Cet ensemble est la représentation logique d'une partie de la connaissance experte. Il est nécessaire pour la suite du travail que  $\mathcal{C}_T(O)$  soit logiquement cohérent. Nous considérons donc pour la suite de cette section que  $\mathcal{C}_T(O)$  est cohérent. Une fois l'ensemble  $\mathcal{C}_T(O)$  créé, nous construisons les ensembles  $\mathcal{PC}^I(O)$  et  $\mathcal{PC}^E(O)$  comme indiqué

en 11.1.2. Ces deux ensembles représentent les croyances intrinsèques et extrinsèques issues de l'observation. L'union de ces deux ensembles est l'ensemble  $\mathcal{C}_O$ , défini par :

$$\mathcal{C}_O(O) = \mathcal{PC}^I(O) \cup \mathcal{PC}^E(O)$$

Un ensemble  $O$  est alors cohérent si et seulement si l'ensemble des croyances issues de l'observation est cohérent avec l'ensemble des connaissances expertes. D'où la définition suivante :

**Définition 96** Soit  $O$  un ensemble d'objets, soit  $\mathcal{C}_T(O)$  l'ensemble des formules représentant une vision théorique de  $O$  et soit  $\mathcal{C}_O(O)$  l'ensemble formules représentant les contraintes observées sur  $O$ . L'ensemble  $O$  est cohérent si et seulement si :

$$\mathcal{C}_T(O) \cup \mathcal{C}_O(O) \text{ est cohérent.}$$

Si l'ensemble  $O$  est incohérent, le théorème de compacité souligne qu'il existe au moins un sous ensemble  $O'$  de  $O$  qui est tel que  $\mathcal{C}_T(O') \cup \mathcal{C}_O(O')$  soit incohérent. L'exemple 29 illustre cette définition.

**Exemple 29** Reprenons l'exemple 27. L'instanciation théorique des contraintes de l'ensemble des prédicats unaire  $\mathcal{PC}^I$  sur  $O$  produit l'ensemble :

$$\mathcal{PC}_T^I(O) = \{p_h^I(o_1), p_h^I(o_2), p_h^I(o_3)\}$$

L'instanciation théorique des formules de  $\mathcal{PC}^E$  sur  $O$  donne l'ensemble

$$\mathcal{PC}_T^E(O) = \{ f_n^E(o_1, o_2), f_n^E(o_2, o_3), f_n^E(o_1, o_3), \\ f_l^E(o_1, o_2), f_l^E(o_2, o_3), f_l^E(o_1, o_3) \}$$

L'instanciation par l'observation de  $\mathcal{PC}^I$  sur  $O$  donne :

$$\mathcal{PC}^I(O) = \{\neg p_h^I(o_1), p_h^I(o_2), p_h^I(o_3)\}$$

De même que :

$$\mathcal{PC}^E(O) = \{ f_n^E(o_1, o_2), \neg f_n^E(o_2, o_3), f_n^E(o_1, o_3), \\ \neg f_l^E(o_1, o_2), f_l^E(o_2, o_3), f_l^E(o_1, o_3) \}$$

A partir de  $\mathcal{C}_T(O) = \mathcal{PC}_T^I(O) \cup \mathcal{PC}_T^E(O)$  et  $\mathcal{C}_O(O) = \mathcal{PC}^I(O) \cup \mathcal{PC}^E(O)$  nous déduisons que l'ensemble  $\mathcal{C}_T(O) \cup \mathcal{C}_O(O)$  est incohérent. En effet, il contient les formules contradictoires  $p_h^I(o_1)$  et  $\neg p_h^I(o_1)$  mais également  $f_n^E(o_2, o_3)$  et  $\neg f_n^E(o_2, o_3)$  ainsi que  $f_l^E(o_1, o_2)$  et  $\neg f_l^E(o_1, o_2)$ . Cette incohérence signifie que l'ensemble  $O$  est incohérent.

## R-Ensembles

La révision par R-ensembles [65, 85] traite de la révision d'un ensemble de formules propositionnelles par un autre ensemble de formules propositionnelles, les formules étant sous forme normale conjonctive. Cette approche de la révision consiste à déterminer les ensembles minimaux de clauses à retirer pour restaurer la cohérence.

Nous rappelons maintenant les définitions formelles sur les R-Ensembles que nous présentons dans le cadre de la logique des prédicats instanciée. Soit  $K$  et  $A$  deux ensembles de clauses prédictives instanciées tels que l'union des deux ensembles est incohérente. Un R-Ensemble potentiel de  $K \cup A$  est un ensemble de clauses prédictives qui une fois retirées de  $K$  rétablit la cohérence. Plus formellement :

**Définition 97** Soit  $K$  et  $A$  deux ensembles de clauses prédictives instanciées. L'ensemble  $X \subseteq A$  est un R-Ensemble potentiel de  $K \cup A$  si et seulement si :

$$(K \setminus X) \cup A \text{ est cohérent.}$$

Un R-Ensemble potentiel pour un ensemble  $K \cup A$  n'est pas unique. On note alors  $F$  l'ensemble des R-ensembles potentiels. Un R-Ensemble est un R-Ensemble potentiel minimal suivant un critère  $p$  particulier. Ce critère peut être représenté par un pré-ordre total sur les R-Ensembles potentiels. Nous considérons ici le critère de cardinalité, c'est à dire qu'un R-ensemble est un R-ensemble potentiel de plus petite cardinalité, cela se traduit par un choix du plus petit nombre de conflits à régler. Un R-ensemble est alors défini par :

**Définition 98** Soit  $K$  et  $A$  deux ensembles de clauses prédictives instanciées et soit  $F$  l'ensemble des R-Ensembles potentiels. L'ensemble  $X \subseteq K$  est un R-Ensemble de  $K \cup A$  si et seulement si :

- $X$  est un R-Ensemble potentiel ;
- $\forall X' \in F$ , si  $(K \setminus X') \cup A$  est cohérent alors  $|X| \leq |X'|$ <sup>5</sup>.

Nous proposons une utilisation des R-Ensembles pour la détermination des  $\mathcal{E}$ -incohérences. En effet, d'après la définition 98, si l'ensemble de départ est incohérent, les R-ensembles fournissent des ensembles croyances induisant l'incohérence. L'exemple 30 illustre l'utilisation de R-Ensembles. Lors de la confrontation de l'instanciation théorique et de l'instanciation issue de l'observation nous déterminons les R-Ensembles de  $\mathcal{C}_O(O)$  pour rendre  $\mathcal{C}_T(O) \cup \mathcal{C}_O(O)$  cohérent. Ces R-Ensembles permettent de construire les ensembles d'incohérence  $\Theta^I$  et  $\Theta^E$ . L'exemple suivant illustre le calcul des R-Ensembles dans notre cas.

**Exemple 30** Continuons l'exemple 29. L'ensemble  $\mathcal{C}_T(O) \cup \mathcal{C}_O(O)$  est incohérent. En prenant comme critère de sélection la cardinalité des ensembles, Le calcul des R-Ensembles construit un seul R-Ensemble :

$$X^{C_O} = \{ \neg p_h^I(o_1), \neg f_n^E(o_2, o_3), \neg f_l^E(o_1, o_2) \}$$

Le résultat aurait été identique en utilisant comme critère de sélection l'inclusion ensembliste.

### Détection d'incohérences

Les R-ensembles permettent de pointer les clauses responsables de l'incohérence et sont très adaptés à la construction des ensembles d'incohérence  $\Theta^I$  et  $\Theta^E$  définis respectivement en 94, page 148. A partir des clauses prédictives contenues dans les R-Ensembles, nous pouvons retrouver les objets en conflits ainsi que les contraintes violées. Chaque R-Ensemble permet de créer un couple d'ensembles  $\Theta^I$  et  $\Theta^E$ . En effet, si un prédicat instancié  $p_k^I(o_i)$  est présent dans un R-Ensemble  $X^{C_O}$ , alors le couple  $(o_i, c_k^I)$  est ajouté à  $\Theta^I$ . Si une clause  $f_l^E(o_i, o_j)$  est présente dans  $X^{C_O}$ , alors le couple  $((o_i, o_j), f_l^E)$  est ajouté à  $\Theta^E$ . Plus formellement, l'ensemble d'incohérence intrinsèque est défini par :

**Définition 99** Soit  $C^I$  l'ensemble des contraintes sur les attributs représenté par  $\mathcal{PC}^I$ . Soit  $X^{C_O}$  un R-Ensemble, l'ensemble  $\Theta^I$  des incohérences intrinsèques est défini tel que :

$$\forall p_k^I(o_i) \in X^{C_O}, (o_i, c_k^I) \in \Theta^I$$

De même, la construction de l'ensemble d'incohérences extrinsèques. est défini par :

**Définition 100** Soit  $C^E$  l'ensemble des contraintes sur les relations représenté par  $\mathcal{PC}^E$ . Soit  $X^{C_O}$  un R-Ensemble d'observation, l'ensemble  $\Theta^E$  des incohérences extrinsèques est défini tel que :

$$\forall f_l^E(o_i, o_j) \in X^{C_O}, ((o_i, o_j), c_l^E) \in \Theta^E$$

L'exemple 31 illustre la construction des ensembles d'incohérence grâce aux R-Ensembles.

**Exemple 31** Suite à l'exemple 30, le seul R-Ensemble est :

$$X^{C_O} = \{ \neg p_h^I(o_1), \neg f_n^E(o_2, o_3), \neg f_l^E(o_1, o_2) \}$$

Les définition des ensembles d'incohérence permettent de construire :

$$\Theta^I = \{(o_1, c_h^I)\}$$

De même que :

$$\Theta^E = \{((o_2, o_3), c_n^E), ((o_1, o_2), c_l^E)\}$$

Nous étudions maintenant la méthode automatique de détermination de l'incohérence.

<sup>5</sup> $|X|$  représente la cardinalité de  $X$

### Algorithme de détection d'incohérence basé sur les R-Ensembles

L'algorithme de détection d'incohérence basé sur les R-Ensembles suit une méthode en 5 étapes.

1. Création de l'ensemble de croyances,  $\mathcal{C}_T$ , représentant la vision théorique de l'ensemble d'objets.
2. Instanciation de  $\mathcal{PC}^I$  et  $\mathcal{PC}^E$  sur  $O$ . Une fois  $\mathcal{PC}^I(O)$  et  $\mathcal{PC}^E$  obtenus, la construction de  $\mathcal{C}_O$  est évidente.
3. Vérification de la cohérence de  $\mathcal{C}_T \cup \mathcal{C}_O$ . Cette vérification peut être faite par des SAT-solveurs et est nécessaire car si l'ensemble est cohérent, les R-Ensembles sont inutiles et proposent d'enlever des croyances non conflictuelles.
4. Détermination des R-Ensembles. La mise en oeuvre du calcul des R-ensembles a été réalisée en utilisant une traduction en programmation logique avec sémantique des modèles stables [10, 11] et ont été testées dans le contexte d'application géographique pour le projet européen REVIGIS.
5. Construction pour chaque R-Ensemble  $X_i^{\mathcal{C}_O}$  du couple  $(\Theta_i^I, \Theta_i^E)$  d'ensembles d'incohérence intrinsèque et extrinsèque.

Le rétablissement de la cohérence peut alors se baser sur les informations apportées par les ensembles d'incohérences  $\Theta^I$  et  $\Theta^E$ . Le critère de sélection utilisé ici étant la cardinalité des R-ensembles, Si l'ensemble d'objets  $O$  est incohérent alors il existe au moins un R-ensemble induisant la construction d'ensembles d'incohérence  $\Theta^I$  et  $\Theta^E$ . Le rétablissement d'incohérence doit alors au préalable déterminer quel ensemble d'incohérences d'incohérence seront utilisés pour rétablir la cohérence. Nous considérons dans ce travail qu'il est toujours possible de choisir un R-ensemble unique suivant des critères particuliers ou de manière arbitraire.

## 11.3 Formalisation de la fusion d'ensembles d'objets

Dans la représentation Entité, nous assimilons la fusion de connaissances à la fusion d'ensembles d'objets. La fusion dans cette représentation particulière doit respecter les trois propriétés de base :

- Chaque ensemble d'objets à fusionner est cohérent.
- L'ensemble d'objets résultat de la fusion est cohérent.
- Le maximum de connaissance doit être présent dans le résultat de la fusion.

Mettre en place un processus de fusion dans le paradigme objet consiste à exprimer ces propriétés en représentation objet et à proposer un processus de fusion. Le processus de fusion repose l'utilisation d'un opérateur de fusion.

**Définition 101** Soit  $\Omega$  l'ensemble des ensembles d'objets. un opérateur de fusion d'ensembles d'objets, noté  $\oplus$  est une application définie telle que :

$$\begin{aligned} \Omega^n &\rightarrow \Omega \\ \{O_1, \dots, O_n\} &\rightarrow O_{\oplus} = O_1 \oplus \dots \oplus O_n \end{aligned}$$

et pour lequel l'ensemble fusionné  $O_{\oplus}$  est cohérent.

Il existe plusieurs approches pour construire un ensemble  $\Omega$  cohérent. Les deux approches que nous proposons maintenant reposent sur la notion d'ensemble d'incohérences selon les définitions 94 et 95, page 148. La méthode consiste en :

- Construire un ensemble  $\Omega_u$  contenant tous les objets.
- Déterminer tous les ensembles d'incohérences
- Appliquer une technique de fusion.

L'ensemble  $\Omega_u$  est l'union de tous les ensembles composant  $\Omega$ . Formellement :

$$\Omega_u = \bigcup_{i=1}^n O_i, O_i \in \Omega$$

Nous calculons ensuite les couples d'ensembles d'incohérence  $(\Theta_i^I, \Theta_i^E)$  pour  $\Omega_u$  en utilisant l'approche matricielle ou l'approche basée sur les R-Ensembles. Les ensembles d'incohérence expriment alors quels sont les objets source d'incohérence et quelles contraintes sont falsifiées. La solution afin de rétablir la cohérence de  $\Omega_u$  est de corriger un couple  $(\Theta_i^I, \Theta_i^E)$ . Trois types de fusion sont disponibles : la fusion manuelle, la fusion automatique et la fusion automatisée.

## 11.4 Restauration de la cohérence d'un ensemble d'objets

La gestion des objets mesurés lors de l'étude d'un site peut être perturbée par l'étalage des mesures dans le temps, le nombre d'acteurs impliqués dans les différentes phases de mesures et l'utilisation d'informations hétérogènes. Les objets mesurés peuvent alors être regroupés dans différents ensembles obtenus indépendamment les uns des autres.

Le résultat final de l'étude d'un site nécessite la production d'un ensemble d'objet unique et cohérent. La figure 11.2 illustre la production de cet ensemble. Toutes les  $n$  sessions de mesures engendrent un ensemble

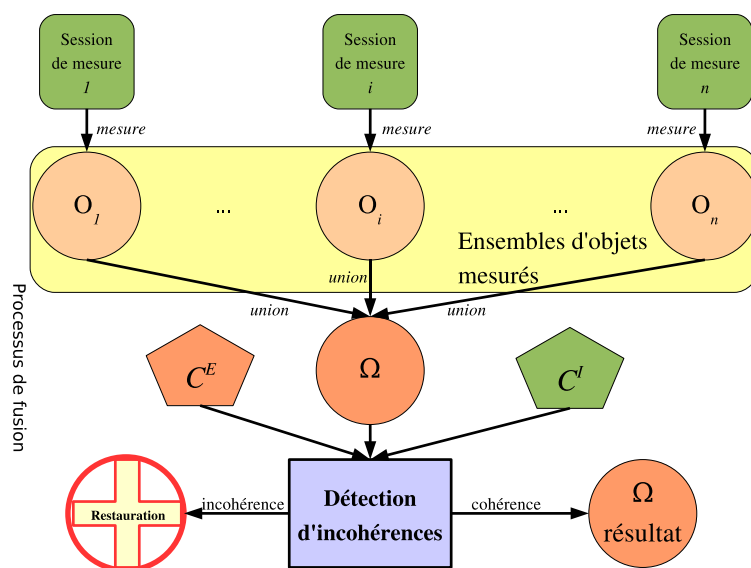


FIG. 11.2 – Construction d'un ensemble d'objets cohérent.

d'objets mesurés. Le résultat final de la mesure des objets d'un site doit s'appuyer sur tous les objets mesurés. L'union, notée  $\Omega$  de tous les ensembles d'objets  $O_i$  disponibles permet la construction d'un ensemble contenant tous les objets mesurés, cependant, la cohérence de cet ensemble n'est pas garantie même si chaque ensemble issu d'une session de mesure est cohérent. La vérification de la cohérence de l'ensemble d'objets  $\Omega$  est basée sur les techniques décrites en 11.1 consistant à construire des ensembles d'incohérences. Si aucun ensemble d'incohérence n'est trouvé, alors  $\Omega$  contenant tous les objets mesurés est cohérent. Il est donc le résultat final de l'étude du site. Dans le cas contraire, les ensembles d'incohérences doivent être corrigés et la cohérence restaurée.

Il existe trois manières différentes afin de restaurer la cohérence. La restauration de cohérence automatique élimine les objets apportant l'incohérence en fonction de priorités définies entre les objets et entre les ensembles d'objets. La restauration de cohérence manuelle exprime les ensembles d'incohérences de manière compréhensible à un expert et lui permet de rétablir lui-même la cohérence grâce aux outils disponibles. La restauration de cohérence automatisée est une systématisation de la méthode manuelle. A partir de fonctions de restaurations données par les experts, les objets apportant l'incohérence sont corrigés.

### 11.4.1 Fusion prudente

Le premier type de fusion automatique est la fusion prudente. Cette fusion élimine de l'ensemble  $\Omega$  tous les objets apparaissant dans au moins un ensemble d'incohérence. Plus formellement, cette fusion s'écrit :

$$O_{\oplus} = \{o \in \Omega \mid \forall \theta^E \in \Theta^E, o \notin \theta^E \text{ et } \forall \theta^I \in \Theta^I, o \notin \theta^I\}$$

La fusion prudente garantit que l'ensemble d'objets fusionné est cohérent, cependant, une grande partie de la connaissance initiale peut être perdue. Pour perdre moins de connaissance, la fusion prudente peut être appli-



quée seulement aux ensembles d'incohérences extrinsèques ou intrinsèques. Cependant, la cohérence finale de l'ensemble  $O_{\oplus}$  n'est pas garantie.

La fusion prudente ne peut être la seule fusion automatique possible. Bien que celle-ci permettent un rétablissement certain de la cohérence, la quantité de connaissance perdue peut être très importante. Une deuxième méthode de fusion automatique est possible.

### 11.4.2 Fusion avec priorité entre les objets et les ensembles d'objets

Les experts peuvent affiner la restauration de cohérence automatique en fournissant des priorités entre les objets et entre les ensembles d'objets. Chaque objet étant le résultat d'une session de mesure, il est possible d'exprimer des priorités entre les objets d'une même session. En effet, la précision des mesures peut varier d'un objet à l'autre. De plus, des priorités entre les sessions peuvent être également exprimées, certaines sessions pouvant être jugées plus fiables que d'autres. Nous reprenons ici le travail du chapitre 7, page 87, sur la combinaison de pré-ordres en l'appliquant aux ensembles d'objets.

La priorité externe et les priorités internes correspondent respectivement à un pré-ordre total externe et des pré-ordres totaux internes représentés par des polynômes. Dans ce qui suit, les éléments préférés sont les minimaux dans le pré-ordre. Nous définissons maintenant les notions de pré-ordre externe et de pré-ordre interne pour les ensembles d'objets.

#### Pré-ordre externe

La définition d'un pré-ordre externe repose sur la définition d'une fonction de pondération externe pour un ensemble d'objets.

**Définition 102** Soit  $\mathcal{O} = \{O_1, \dots, O_n\}$  un ensemble d'ensembles d'objets. Une fonction de pondération externe est une application  $q_{\mathcal{O}}$  telle que :

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{O}} : \quad \mathcal{O} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ O_i &\longrightarrow q_{\mathcal{O}}(O_i) \end{aligned}$$

A partir de la fonction de pondération externe, nous définissons un pré-ordre externe sur l'ensemble des ensembles d'objets, noté  $\leq_{\mathcal{O}}$ .

**Définition 103** Un pré-ordre externe sur un ensemble d'ensembles d'objets  $\mathcal{O}$  est défini par :

$$\forall O_i, O_j \in \mathcal{O}, \quad O_i \leq_{\mathcal{O}} O_j \quad \text{ssi} \quad q_{\mathcal{O}}(O_i) \leq q_{\mathcal{O}}(O_j)$$

Deux cas se présentent. Soit les ensembles explicitement. Dans ce cas les poids  $q(O_i)$  sont codés par des valeurs constantes. Soit les ensembles ne sont pas ordonnées. Tous sont donc préférés, et dans ce cas,  $q$  est telle que  $\forall O_i \in \mathcal{O}, q(O_i) = 0$ .

#### Pré-ordre interne

La définition formelle d'un pré-ordre interne repose sur la définition d'une fonction de pondération interne pour chaque ensemble d'objet.

**Définition 104** Soit  $O = \{o_1, \dots, o_n\}$  un ensemble d'objets. Une fonction de pondération interne est telle que :

$$\begin{aligned} p_O : \quad O &\longrightarrow \mathbb{R}[x] \\ o_i &\longrightarrow p_O(o_i) \end{aligned}$$

A partir de la fonction de pondération interne, il est possible de définir un pré-ordre interne pour un ensemble d'objets  $O$ , noté  $\leq_O$ .

**Définition 105** Un pré-ordre interne sur les objets de l'ensemble  $O$  avec une fonction de pondération  $p_O$  est défini par :

$$\forall o_j, o_k \in O, \quad o_j \leq_O o_k \quad \text{ssi} \quad p_O(o_j) \leq p_O(o_k)$$

Il existe trois cas pour un ensemble  $O$ . Tout d'abord, le pré-ordre peut être défini arbitrairement. Dans ce cas, les poids  $p_O(o_i)$  sont codés par des polynômes, comme rappelé en 5, page 51. Par ailleurs, le pré-ordre peut être implicite, les poids  $p_O(o_i)$  peuvent être calculés et les pré-ordres sont codés par des polynômes constants. Enfin, il n'y a pas de pré-ordre défini. Cela signifie que toutes les interprétations sont préférées. Dans ce cas  $\forall o_i \in O, p_O(o_i) = 0$ , c'est à dire des polynômes nuls.

### 11.4.3 Pré-ordre global pour les objets

A partir des pré-ordres internes et externes nous pouvons définir un pré-ordre global sur l'ensemble des objets. Ce pré-ordre global peut être représenté grâce à des polynômes. La première étape dans la construction de ce pré-ordre est de définir le poids externe global.

**Définition 106** Soit  $q_O(O_i)$  les poids externes pour les ensembles d'objets  $O_i, 1 \leq i \leq n$  de  $\mathcal{O}$ . Le poids externe global est défini par  $q_{\otimes} = \sum_{i=0}^{n-1} q_O(O_{i+1}) x^i$ .

Le poids externe global défini, nous pouvons définir également la fonction de rang absolu :

**Définition 107** Soit  $\mathcal{O} = \{O_1, \dots, O_n\}$  un ensemble d'ensemble d'objets. Une fonction de rang absolue, notée  $r_{\mathcal{O}}$ , est une fonction de  $\mathcal{O}$  dans  $\mathbb{N}$  qui associe à chaque ensemble  $O_i$  un rang absolu  $r_{\mathcal{O}}(O_i)$  tel que :

- Si  $O_i <_{\mathcal{O}} O_j$  alors  $r_{\mathcal{O}}(O_i) < r_{\mathcal{O}}(O_j)$
- Si  $O_i =_{\mathcal{O}} O_j$  et  $i < j$  alors  $r_{\mathcal{O}}(O_i) < r_{\mathcal{O}}(O_j)$

La fonction  $r_{\mathcal{O}}$  est inversible et permet à partir d'un entier  $i$  de retrouver l'ensemble d'objet dont  $i$  est le rang absolu. Avant de continuer, nous supposons qu'il existe une fonction  $s$  qui associe à chaque objet  $o_k$  l'ensemble d'objets  $O_i$  d'où il provient. La définition d'une telle fonction est triviale. Nous définissons maintenant une fonction de poids global applicable à un ensemble d'objets  $O_g$ .

**Définition 108** Soit  $\mathcal{O} = \{O_1, \dots, O_n\}$  un ensemble de  $n$  objets et soit  $O_{\mu}$  l'union de tous les ensembles de  $\mathcal{O}$ . Soit  $O_g = \{o_i \mid o_i \in \bigcup_{k=1}^n O_k\}$  un sous ensemble de  $O_{\mu}$ . Le poids global de  $O_g$ , noté  $p_{\otimes}(O_g)$  est défini tel que :

$$p_{\otimes}(O_g) = \sum_{i=1}^{|O_g|} p_{s(o_i)}(o_i) \times x^{\sum_{m=1}^{r_{\mathcal{O}}(s(o_i))-1} MAX_{r_{\mathcal{O}}^{-1}(m)}}$$

avec

$$MAX_{r_{\mathcal{O}}^{-1}(m)} = \max_{o' \in O_{r_{\mathcal{O}}^{-1}(m)}} (deg(p_{O_{r_{\mathcal{O}}^{-1}(m)}}(o')) + 1)$$

La fonction de poids global permet de définir un pré-ordre global sur les sous-ensembles d'objets, formellement :

**Définition 109** Soit  $\mathcal{O} = \{O_1, \dots, O_n\}$  un ensemble d'ensemble d'objets. soit  $O_{\mu}$  l'union de tous les ensembles de  $\mathcal{O}$ . Soit  $O_g$  et  $O'_g$  deux sous-ensembles de  $O_{\mu}$ . Si  $s$  est une stratégie de comparaison de polynômes, le pré-ordre global  $\leq_{\otimes_s}$  est défini tel que :

$$O_g \leq_{\otimes_s} O'_g \text{ si et seulement si } p_{\otimes}(O_g) \leq_s p_{\otimes}(O'_g)$$

Grâce à ce pré-ordre nous pouvons ordonner tous les sous ensembles de  $O_{\mu}$ . Ce pré-ordre global est utilisé pour créer une méthode automatique de restauration de la cohérence de  $_{\mu}$ .

#### Restauration de la cohérence intrinsèque

La restauration de la cohérence intrinsèque est le retrait de tous les objets incohérent intrinsèquement. Il n'y a aucun choix possible entre les objets à retirer afin de rétablir la cohérence car ceux-ci sont par définition de l'incohérence intrinsèque tous indépendants. Retirer un objet incohérent intrinsèquement ne change rien à l'incohérence intrinsèque des autres objets. Soit  $O_{\mu}$  un ensemble d'objets, Nous définissons l'ensemble d'objets intrinsèquement incohérents, noté  $O^I$ , par :

$$O^I = \{ o_i \in O_{\mu} \mid \exists \theta_j^I \in \Theta^I, o_i \in \theta_j^I \}$$

La restauration de la cohérence intrinsèque de  $O_{\mu}$  est obtenue en retirant les objets de l'ensemble  $O^I$ . Formellement :

$$O \setminus O^I \text{ est intrinsèquement cohérent}$$

### Restauration de la cohérence extrinsèque

La restauration de l'incohérence extrinsèque d'un ensemble d'objet  $O_\mu$  est plus délicate que dans le cas intrinsèque. En effet, les objets sont ici dépendants les uns des autres. La construction de l'ensemble  $O^E$  des objets à retirer de  $O_\mu$  afin de supprimer les incohérences extrinsèques repose sur le traitement des ensembles d'incohérence extrinsèque en enlevant les objets les moins prioritaire de chaque couple. La détermination des objets prioritaires repose sur le pré-ordre global  $\leq_{\otimes_s}$  à partir duquel nous pouvons ordonner les ensembles d'incohérence à traiter de manière à ce que les incohérences impliquant les objets les moins prioritaires soit traitées en premier. Cela revient à créer un pré-ordre sur l'ensemble d'incohérence intrinsèque défini comme suit :

**Définition 110** Soit  $O_\mu$  un ensemble d'objets résultat de l'union de  $n$  ensembles d'objets. Soit  $\Theta^E$  l'ensemble d'incohérence extrinsèque pour  $O_\mu$  et soit  $\leq_{\otimes_s}$  le pré-ordre global sur les sous ensembles de  $O_\mu$ . Soit  $((o_i, o_j), f_k^E)$  et  $((o_{i'}, o_{j'}), f_{k'}^E)$  deux éléments de  $\Theta^E$ . Le pré-ordre sur l'ensemble d'incohérence extrinsèque, noté  $\leq_{\Theta^E}$  est défini par :

$$((o_i, o_j), f_k^E) \leq_{\Theta^E} ((o_{i'}, o_{j'}), f_{k'}^E) \text{ ssi } \{o_i, o_j\} \leq_{\oplus_s} \{o_{i'}, o_{j'}\}$$

Selon la stratégie  $s$  choisie, le pré-ordre sur les ensembles d'objets est différent tout comme le pré-ordre sur  $\Theta_E$ . L'ensemble  $O^E$  contenant les objets à retirer de  $O_\mu$  peut alors être construit comme suit :

$$O^E = \{ \max_{\leq_{\oplus_s}} (\{o_i, o_j \mid o_i, o_j \notin O^E, ((o_i, o_j), c_k^E) \in \Theta^E \\ \text{et } \forall ((o_l, o_m), c_t^E) \in \Theta^E \setminus ((o_i, o_j), c_k^E), ((o_l, o_m), c_t^E) \leq_{\Theta^E} ((o_i, o_j), c_k^E)\}) \}$$

Cet ensemble est composé des objets maximaux présent dans les incohérences intrinsèques maximales. La construction d'un tel ensemble est assez simple, il suffit de parcourir l'ensemble des éléments  $((o_i, o_j), c_k^E)$  de  $\Theta^E$  par ordre décroissant et retirer à chaque fois l'objet maximal de  $\{o_i, o_j\}$  suivant le pré-ordre global  $\leq_{\oplus_s}$ .

### Resultat de la fusion

Une fois construit les ensembles d'objets incohérents intrinsèquement et extrinsèquement, le résultat de la fusion est obtenu par le retrait de l'ensemble  $O_\mu$  de tous les éléments de  $O^I$  et de tous les éléments de  $O^E$ . Plus formellement :

$$O_\oplus = O_\mu \setminus (O^I \cup O^E)$$

les objets composant  $O_\oplus$  ne sont plus sujet à aucune incohérence.

**Exemple 32** Soit  $\mathcal{E}$  une entité. Soit  $\mathcal{O} = \{O_1, O_2 \text{ et } O_3\}$  un ensemble de trois ensembles d'objets caractérisés par l'entité  $\mathcal{E}$  et définis tels que :

$$\begin{aligned} O_1 &= \{ o_{1a}, o_{1b}, o_{1c}, o_{1d} \} \\ O_2 &= \{ o_{2a}, o_{2b}, o_{2c} \} \\ O_3 &= \{ o_{3a}, o_{3b}, o_{3c}, o_{3d}, o_{3e} \} \end{aligned}$$

Les experts ont exprimé des priorités sur les ensembles d'objets qui sont représentés par le pré-ordre externe :

$$O_1 <_{\mathcal{O}} O_2 =_{\mathcal{O}} O_3$$

avec  $q(O_1) = 1, q(O_2) = 2$  et  $q(O_3) = 2$ .

Les opérateurs et les experts ont exprimé pour chaque ensemble d'objets des priorités représentées par trois pré-ordres internes :

$$\begin{aligned} \leq_{O_1}: & o_{1a} =_{O_1} o_{1d} <_{O_1} o_{1b} <_{O_1} o_{1c} \\ \leq_{O_2}: & o_{2a} =_{O_2} o_{2b} <_{O_2} o_{2c} \\ \leq_{O_3}: & o_{3a} =_{O_3} o_{3c} <_{O_3} o_{3b} =_{O_3} o_{3d} <_{O_3} o_{3e} \end{aligned}$$

Les valeurs des poids internes des objets sont :

$O_1$	$o_{1a}$	$o_{1b}$	$o_{1c}$	$o_{1d}$
$p_{O_1}(o_i)$	1	2	3	1

$O_2$	$o_{2a}$	$o_{2b}$	$o_{2c}$
$p_{O_2}(o_i)$	1	1	2

$O_3$	$o_{3a}$	$o_{3b}$	$o_{3c}$	$o_{3d}$	$o_{3e}$
$p_{O_3}(o_i)$	1	2	1	2	3

L'union des trois ensembles d'objets est  $O_\mu = O_1 \cup O_2 \cup O_3$ . La détection d'incohérences a construit un ensemble d'incohérence intrinsèque  $\Theta^I$  tel que :

$$\Theta^I(O_\mu) = \{ (o_{1a}, c_1^I), (o_{2b}, c_1^I), (o_{3e}, c_2^I) \}$$

L'ensemble d'incohérences extrinsèques obtenu est :

$$\Theta^E(O_\mu) = \{ ((o_{1b}, o_{2a}), c_2^E), ((o_{2b}, o_{3c}), c_2^E), ((o_{1d}, o_{3d}), c_1^E), ((o_{2c}, o_{3c}), c_3^E) \}$$

La détermination de l'ensemble des objets incohérents intrinsèquement est immédiate :

$$O^I = \{ o_{1a}, o_{2b}, o_{3e} \}$$

Le calcul des poids globaux pour les ensembles d'objets incohérents donne :

$$\begin{aligned} p_\otimes(\{o_{1b}, o_{2a}\}) &= p_{O_1}(o_{1b}) * x^0 + p_{O_2}(o_{2a}) * x^{MAX_{O_1}} \\ &= 2 + x \\ p_\otimes(\{o_{2b}, o_{3c}\}) &= p_{O_2}(o_{2b}) * x^{MAX_{O_1}} + p_{O_3}(o_{3c}) * x^{MAX_{O_1} + MAX_{O_2}} \\ &= 1 * x^1 + 1 * x^{1+1} \\ &= x + x^2 \\ p_\otimes(\{o_{1d}, o_{3d}\}) &= p_{O_1}(o_{1d}) * x^0 + p_{O_3}(o_{3d}) * x^{MAX_{O_1} + MAX_{O_2}} \\ &= 1 * x^0 + 2 * x^{1+1} \\ &= 1 + 2x^2 \\ p_\otimes(\{o_{2c}, o_{3c}\}) &= p_{O_2}(o_{2c}) * x^{MAX_{O_1}} + p_{O_3}(o_{3c}) * x^{MAX_{O_1} + MAX_{O_2}} \\ &= 2 * x^1 + 1 * x^{1+1} \\ &= 2x + x^2 \end{aligned}$$

A partir des poids globaux calculés et du choix d'une stratégie de fusion, nous pouvons définir un pré-ordre sur les éléments de  $\Theta_E$ . Pour plus de simplicité posons

$$\begin{aligned} \theta_1^E &= ((o_{1b}, o_{2a}), c_2^E) \\ \theta_2^E &= ((o_{2b}, o_{3c}), c_2^E) \\ \theta_3^E &= ((o_{1d}, o_{3d}), c_1^E) \\ \theta_4^E &= ((o_{2c}, o_{3c}), c_3^E) \end{aligned}$$

Les pré-ordres sur l'ensemble  $\Theta^E$  selon la stratégie choisie sont :

$$\begin{aligned} \leq_{MAX} &: \theta_2^E < \theta_1^E = \theta_3^E = \theta_4^E \\ \leq_{SUM} &: \theta_2^E < \theta_1^E = \theta_3^E = \theta_4^E \\ \leq_{WS} &: \theta_1^E = \theta_2^E = \theta_3^E < \theta_4^E \\ \leq_{LEX} &: \theta_2^E < \theta_4^E < \theta_3^E < \theta_1^E \\ \leq_{GMAX} &: \theta_2^E < \theta_1^E = \theta_3^E = \theta_4^E \end{aligned}$$

Les stratégies  $MAX$ ,  $SUM$  et  $\mathcal{G}MAX$  donnent le même pré-ordre, ceci est du à la simplicité de l'exemple et à l'uniformité des poids internes associés aux objets. La construction des ensembles  $O_s^E$  pour les stratégies  $s$  donne :

$$\begin{aligned} O_{MAX}^E &: \{o_{2c}, o_{3d}, o_{1b}, o_{2b}, o_{3c}\} \\ O_{SUM}^E &: \{o_{2c}, o_{3d}, o_{1b}, o_{2b}, o_{3c}\} \\ O_{WS}^E &: \{o_{2c}, o_{3d}, o_{2b}, o_{3c}, o_{1b}, o_{2a}\} \\ O_{LEX}^E &: \{o_{1b}, o_{1d}, o_{2c}, o_{2b}\} \\ O_{\mathcal{G}MAX}^E &: \{o_{2c}, o_{3d}, o_{1b}, o_{2b}, o_{3c}\} \end{aligned}$$

A partir des stratégies de fusion choisies et des ensembles d'objets incohérents intrinsèquement et extrinsèquement nous pouvons construire les ensembles  $O_1 \otimes_s O_2 \otimes_s O_3$ , selon la stratégie  $s$  choisie :

$$\begin{aligned} O_1 \otimes_{MAX} O_2 \otimes_{MAX} O_3 &: \{o_{1c}, o_{1d}, o_{2a}, o_{3a}, o_{3b}, \} \\ O_1 \otimes_{SUM} O_2 \otimes_{SUM} O_3 &: \{o_{1c}, o_{1d}, o_{2a}, o_{3a}, o_{3b}, \} \\ O_1 \otimes_{WS} O_2 \otimes_{WS} O_3 &: \{o_{1c}, o_{1d}, o_{3a}, o_{3b}, \} \\ O_1 \otimes_{LEX} O_2 \otimes_{LEX} O_3 &: \{o_{1c}, o_{2a}, o_{3a}, o_{3b}, o_{3c}, o_{3d}, \} \\ O_1 \otimes_{\mathcal{G}MAX} O_2 \otimes_{\mathcal{G}MAX} O_3 &: \{o_{1c}, o_{1d}, o_{2a}, o_{3a}, o_{3b}, \} \end{aligned}$$

La méthode de fusion consistant à enlever les objets incohérents permet de restaurer la cohérence mais élimine une grande quantité d'objets. Le problème qui se pose est donc double : d'un côté il faut minimiser les objets à retirer, de l'autre il faut garantir la cohérence de l'ensemble final. Une première solution est de mettre en place des méthodes de fusion d'objets. Ces méthodes au lieu d'écarter les objets incohérents les modifierai afin de les rendre cohérents. Ces modifications sont malheureusement très complexes et ne peuvent à l'heure actuelle être automatisées complètement. Certaines modifications d'objets simples (comme le renommage par exemple en cas de conflit d'identifiant) peuvent être automatisée mais pas suffisamment pour mettre en place une méthode de fusion d'ensemble d'objets complètement automatique. Une solution de restauration de la cohérence manuelle doit être envisagée.

#### 11.4.4 Restauration de cohérence manuelle

La méthode fusion manuelle retourne à l'expert ayant effectué les mesures les couples d'ensembles d'incohérence  $(\Theta_i^I, \Theta_i^E)$ . Suivant son interprétation des résultats, celui-ci peut décider d'intervenir sur les objets problématiques de la manière qu'il souhaite. Cette solution est inévitable en cas de problème majeur comme des erreurs dans le protocole de mesure ou indépendante de l'outil de mesure. Deux ensemble d'objets notés  $\Omega_M^r$  et  $\Omega_M^a$  représentent respectivement les ensembles d'objets pour lesquels les incohérences extrinsèques et intrinsèques ont été corrigées manuellement. La fusion manuelle ne garanti pas qu'après la fusion l'ensemble résultat soit cohérent. Cependant, dans certains cas un résultat faiblement incohérent pour certains objets peut être préféré à un résultat cohérent dans lequel un grand nombre d'objets a disparu. Ceci peut être le cas lorsque de nombreux objets sont incohérent intrinsèquement sans pour autant que cela mette en danger la validité des résultats.

Dans le cadre de l'application des cas d'incohérence intrinsèque non invalidant sont souvent présent. Il peut s'agir de valeurs qui ne sont pas renseignées correctement ou de contraintes qui ne sont pas adaptées à l'étude en cours.

#### 11.4.5 Restauration de cohérence automatisée

La restitution de cohérence automatisée une approche mixte entre fusion automatique et fusion manuelle. La fusion automatique permet d'obtenir un ensemble d'objets cohérent mais au prix d'une perte de la quantité de connaissances globale. En effet, des objets causes de l'incohérence sont retirés du résultat final.

La fusion manuelle offre de bien plus grande possibilité d'intervention sur les objets afin de les modifier pour faire disparaître l'incohérence. Cependant, la nécessité pour les experts de vérifier tous les objets devient vite impossible à satisfaire quand le nombre d'objets augmente.

Les deux méthodes de fusion précédentes ne sont pas totalement incompatibles. Nous proposons une méthode hybride permettant de restaurer la cohérence d'un ensemble d'objets en corrigeant les incohérences pour lesquelles des traitements génériques sont connus. Si aucun traitement n'existe, l'incohérence est alors corrigée en utilisant la méthode automatique ou en redonnant la main à l'expert.

### Traitement de l'incohérence

Les fonctions de traitement de l'incohérence sont mises au point par les experts et les développeurs de l'application lors de la phase de spécification des contraintes. En effet, pour certaines contraintes il est possible de spécifier un traitement automatique permettant de corriger les objets qui ne les respectent pas.

Tout comme pour les contraintes, il existe deux types de fonctions de traitement. Les fonctions de traitements intrinsèques et les fonctions de traitement extrinsèques.

Une fonction de traitement intrinsèque est une application, notée  $f^i$ , qui prend en paramètre un élément de l'ensemble d'incohérences intrinsèques  $\Theta^I$  et qui retourne un objet corrigé afin d'être cohérent intrinsèquement. Plus formellement :

$$\begin{aligned} f^i : \Theta^I(O) &\longrightarrow O \\ \theta_j^I &\longrightarrow f^i(\theta_j^I) \end{aligned}$$

Une fonction de traitement extrinsèque est une application, notée  $f^e$ , qui prend en paramètre un élément de l'ensemble d'incohérences extrinsèques  $\Theta^E$  et qui retourne un ensemble d'objets corrigés afin d'être cohérent extrinsèquement. Plus formellement :

$$\begin{aligned} f^e : \Theta^E(O) &\longrightarrow O' \subset O \\ \theta_j^E &\longrightarrow f^e(\theta_j^E) \end{aligned}$$

Les fonctions de traitement extrinsèques peuvent avoir trois comportements.

- Les deux objets incohérents sont tous les deux modifiés pour ne plus être incohérents ;
- Un nouvel objet est construit à partir des deux objets initiaux ;
- Un des deux objets est retiré du résultat final.

Dans le premier cas, la fonction de traitement retourne les deux objets initiaux sur lesquels des modifications ont été apportées afin de corriger l'incohérence extrinsèque.

Dans le second cas, la fonction de traitement crée un nouvel objet à partir des deux objets initiaux. Dans le cadre de la mesure, ceci peut se produire si lors de différentes sessions de mesure un même objet a été mesuré plusieurs fois et que ces mesures sont complémentaires.

Le troisième cas est le retrait d'un des objets causant l'incohérence du résultat final. La révision d'une session de mesure par une autre ou la demande d'un opérateur ou d'un expert de corriger un objet conduit à un tel traitement. La restauration de cohérence automatique fait également partie de ce cas de figure.

De manière transversale, des fonctions de traitement par défaut peuvent être utilisées si toutes les incohérences ne peuvent être corrigées de manière systématiques. Une telle fonction peut alors soit en appeler à la restauration automatique de la cohérence, soit en appeler à l'expert pour corriger lui-même le problème.

De plus, les fonctions de traitements peuvent reposer sur d'autres fonctions de traitement. Par exemple une fonction de traitement extrinsèque peut tenter de corriger deux objets et appeler une restauration de cohérence automatique en cas d'échec. Une fonction plus spécifique peut tâcher de construire un objet à partir d'une incohérence intrinsèque, puis déléguer la construction à l'expert en cas d'échec et encore utiliser une restauration de cohérence automatique si le choix de l'expert ne rétablit pas la cohérence.

La restauration de cohérence automatisée gomme les inconvénients des deux restaurations de cohérence précédentes. En effet, il est possible de corriger les objets afin de les rendre cohérent sans forcément les retirer du résultat final. De plus, l'automatisation des corrections permet de solliciter l'expert seulement pour les cas de correction les plus difficiles, ceux-ci étant bien souvent dus à un problème lors de la session de mesure et requirant comme correction une nouvelle session.



## **Quatrième partie**

### **Applications**





## Chapitre 12

# Ametist : an Arpenteur ManagEment Tool for Interactive Survey Treatment

### Contents

---

<b>12.1 Introduction . . . . .</b>	<b>168</b>
<b>12.2 Interface utilisateur pour le contrôle des résultats . . . . .</b>	<b>168</b>
12.2.1 Panneau de commandes . . . . .	168
12.2.2 Panneau d'aperçu des photographies . . . . .	169
12.2.3 Panneau d'informations générales . . . . .	169
12.2.4 Espace de travail . . . . .	170
<b>12.3 Détection d'incohérences et fusion des résultats . . . . .</b>	<b>173</b>
12.3.1 Outil de détection d'incohérences . . . . .	173

---

## 12.1 Introduction

L'outil Arpenteur est dédié à la mesure d'objets en utilisant un processus de restitution guidé par la connaissance. Une fois une session de mesure terminée, nous nous trouvons en présence d'un ensemble d'objets mesurés. La nature de l'expérimentation pour laquelle Arpenteur est utilisé peut soulever plusieurs problèmes une fois la mesure effectuée. Le premier problème est la vérification de la validité de la mesure. Dans certains milieux, les moyens optiques nécessaires à la photogrammétrie peuvent être limités. C'est le cas lors de fouilles sous-marines. Les appareils photographiques embarqués doivent être maniables et compacts, ce qui réduit la qualité des images obtenues. De plus, plus la profondeur est grande et plus la puissance de la lumière naturelle et la difficulté d'acheminement d'énergie augmentent et sont des facteurs aggravant encore la déperdition de qualité des prises de vues. Tous ces facteurs influent directement sur la mesure [29]. Les milieux hostiles tels que les déserts sont également des facteurs dégradant la qualité de la mesure.

Le deuxième problème est dû à la taille des sites et à la durée de l'expérimentation. En effet, plus un site est grand et plus son étude est longue, plus les objets à mesurer seront nombreux. Afin de disposer d'un ensemble d'objets mesurés le plus vite possible, plusieurs utilisateurs différents complètent des sessions de mesures avec Arpenteur. La complexité spatiale du site et la dispersion dans le temps des sessions de mesures forment une source d'incohérence lors de l'aggrégation des différents ensembles d'objets mesurés produits. Des objets simples peuvent avoir été mesurés plusieurs fois avec des valeurs variant sensiblement. Des objets complexes peuvent avoir été mesurés en plusieurs fois au cours de sessions différentes ou avoir été re-mesurés pour corriger une erreur. L'aggrégation des ensembles d'objets mesurés ne peut plus se faire sans traitement spécifique et une fusion des ensembles d'objets est nécessaire.

Nous proposons dans ce chapitre un outil venant étendre Arpenteur et répondant aux deux problèmes posés. Cet outil, *Ametist (Arpenteur Management Tool for Interactive Survey Treatment)* a été développé dans le cadre de cette thèse et est intégré au projet Arpenteur. Nous décrivons maintenant l'utilisation de ce nouvel outil.

## 12.2 Interface utilisateur pour le contrôle des résultats

Les résultats produits par Arpenteur sont des ensembles d'objets formalisés grâce aux entités<sup>1</sup>. La gestion et l'édition de ces ensembles d'objets requiert un outil spécifique pouvant être utilisé par tous les acteurs du relevé quel que soit leur domaine d'activité (mesure, archéologie, architecture, biologie, ...).

Nous avons développé une interface intuitive pour permettre aux utilisateurs de gérer et de contrôler les résultats provenant d'Arpenteur. Cette interface est appelée Ametist, pour *Arpenteur Management Tool for Interactive Survey Treatment*. Comme nous pouvons le voir en figure 12.1, l'interface principale est composée de quatre panneaux. En haut le panneau de commande regroupe les commandes d'accès aux outils et traitements. À gauche, le panneau d'aperçu des photographies affiche les miniatures des photographies orientées utilisées durant la restitution. Le panneau de droite fournit les informations générales sur les objets mesurés et les photographies. Le panneau central est l'espace dans lequel les interfaces principales des divers outils sont affichées. Nous proposons maintenant une description plus précise des composantes de l'interface.

### 12.2.1 Panneau de commandes

Le panneau du haut est dédié aux menus et barres d'outils. Il propose des commandes rapides permettant principalement d'ouvrir la table des photographies orientées utilisées pour la mesure photogrammétrique, de montrer la table des points 3D calculés par photogrammétrie ainsi que les points 2D marqués par l'opérateur sur les photographies lors de la restitution. Ces tables de contrôles sont très utiles aux acteurs du domaine de la photogrammétrie car elles permettent de vérifier de visu les résultats produits par les calculs photogrammétriques lors du processus de restitution.

D'autres commandes sont disponibles comme l'affichage de la table des sessions ou l'affichage de la table des objets mesurés. Ces commandes sont destinées principalement aux acteurs liés au domaine de recherche et

<sup>1</sup>pour une description de la formalisation par entités, se référer au chapitre 10, page 10.6

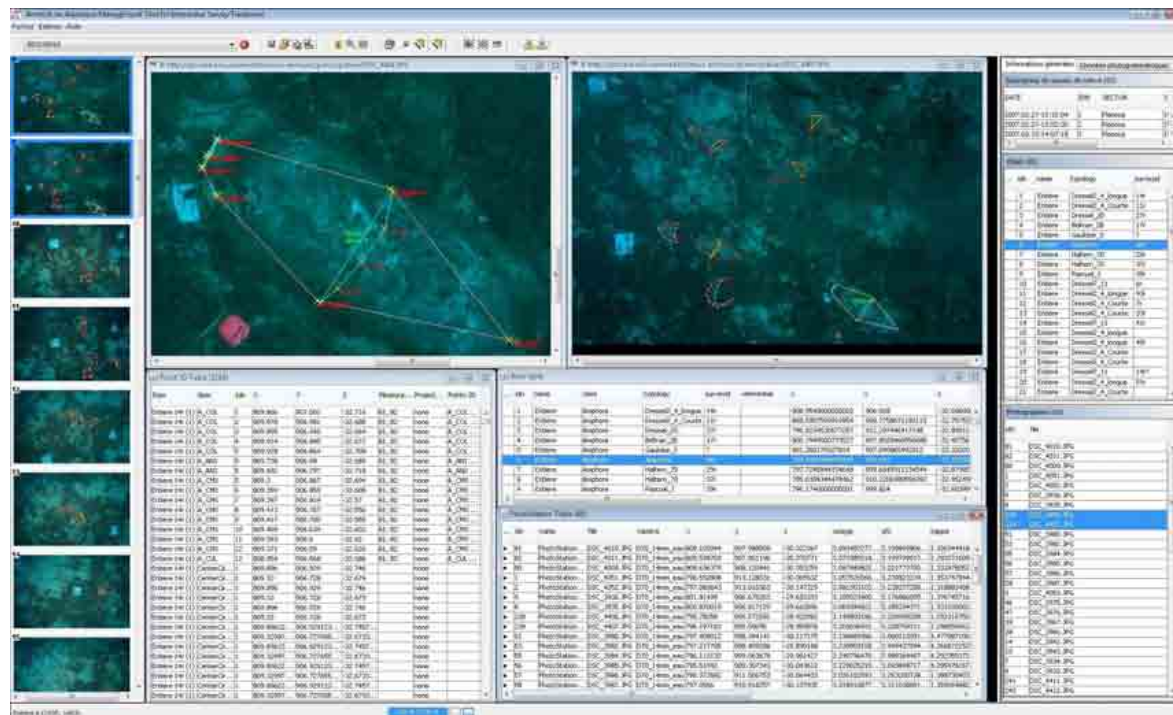


FIG. 12.1 – Vue générale de l'interface d'Ametist

permettent de vérifier globalement des résultats.

## 12.2.2 Panneau d'aperçu des photographies

Dans le panneau de gauche, les utilisateurs disposent d'une vue d'ensemble des photographies orientées utilisées durant le processus de restitution. Des miniatures affichent un aperçu des photographies sur lesquelles les objets mesurés sont projetés afin que l'utilisateur puisse facilement localiser les couples photographie - objets mesurés, comme nous pouvons le voir en figure 12.2.

## 12.2.3 Panneau d'informations générales

Le panneau de droite fournit des informations générales sur les objets mesurés. La table des sessions affiche des informations sur les sessions de mesures composant l'ensemble des objets. Les informations principales sont la localisation dans le temps et la localisation géographique du site.

La table des objets montre la liste des objets mesurés en affichant leurs identifiants ainsi qu'une icône indiquant l'état de l'objet (mesuré, non mesuré, mesuré avec restitution logique, mesuré avec restitution classique, erroné). L'indicateur d'état permet à l'utilisateur d'avoir un aperçu global des problèmes que peut avoir l'objet mesuré. Bien que cet indicateur n'indique pas la nature du problème et ne puisse montrer que les erreurs les plus simples à détecter, il est utile pour une vérification rapide.

La table d'information générales sur les photographies est l'expression textuelle du panneau d'aperçu (voir 12.2.2). Là où le panneau d'aperçu permet de localiser visuellement des photographies, cette table permet de les trouver facilement en fonction de leur identificateur (généralement le nom du fichier image contenant la photographie).

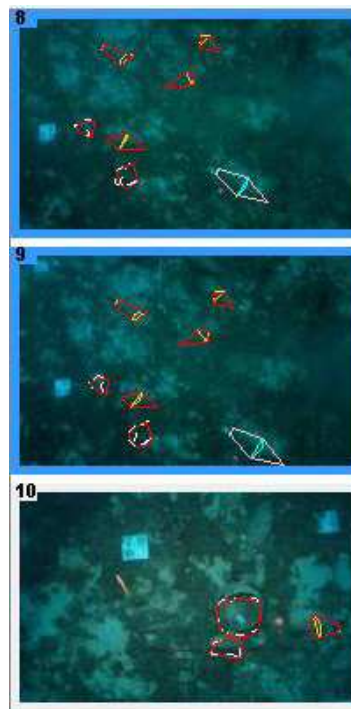


FIG. 12.2 – Manneau des miniatures de photographies.

#### 12.2.4 Espace de travail

Le panneau central de l'interface, appelé aussi espace de travail est l'endroit où tous les outils activés par l'utilisateur sont affichés. Parmi les outils standards d'Ametist sous pouvons citer le panneau d'affichage de photographie, les différentes tables ouvertes grâce aux commandes mais aussi des outils plus spécifiques.

**Le panneau d'affichage des photographies** permet de voir les photographies orientées en taille réelle. Des contrôles permettent diverses opérations sur les images telles que des zooms, des rotations, des changement de luminosité et de contraste. Les informations relatives à la mesure photogrammétrique sont surimprimées sur les images. Ainsi, l'utilisateur peut voir la projection de la représentation 3D des objets mesurés sur les photos ainsi que les points 2D mesurés. Les objets peuvent de plus être sélectionnés depuis leur représentation tracée sur les images. La figure 12.3 illustre l'utilisation du panneau d'affichage des photographies. 12.3.

**Les tables d'informations** Les tables d'informations font parties des principaux outils utilisés dans l'espace de travail. Les descriptions de ces tables sont données en 12.2.1 et 12.2.3. La principale utilité des tables d'informations et la vérification de valeurs particulières relatives aux points 3D, aux points 2D (voir figure 12.4) mais aussi à différentes caractéristiques de l'objet. La table des objets mesurés affiche des informations telles que les valeurs d'attributs morphologiques (longueur, largeur, profondeur), la position de l'objet dans l'espace ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\omega$ ,  $\phi$ ,  $\kappa$ ) mais aussi des informations d'identification, les photographies ayant servi à la mesure de l'objet et des informations textuelles fournies par les opérateurs durant la mesure (typologie pour des amphores, Unité Stratigraphique Murale pour l'architecture, Pourcentage de nécrose ou nombre de branches pour la mesure de colonies de corail en biologie sous parine).

**L'éditeur d'objets mesurés** Quand un objet est sélectionné, l'utilisateur peut accéder à un éditeur d'objet qui permet d'accéder à toutes les informations relatives à la mesure de l'objet. Les premières informations proposées par l'éditeur d'objets sont les attributs de l'objet étudié, comme illustré en figure 12.5. L'utilisateur peut vérifier la validité des mesures de l'objet en consultant l'écart entre les valeurs mesurées et les valeurs

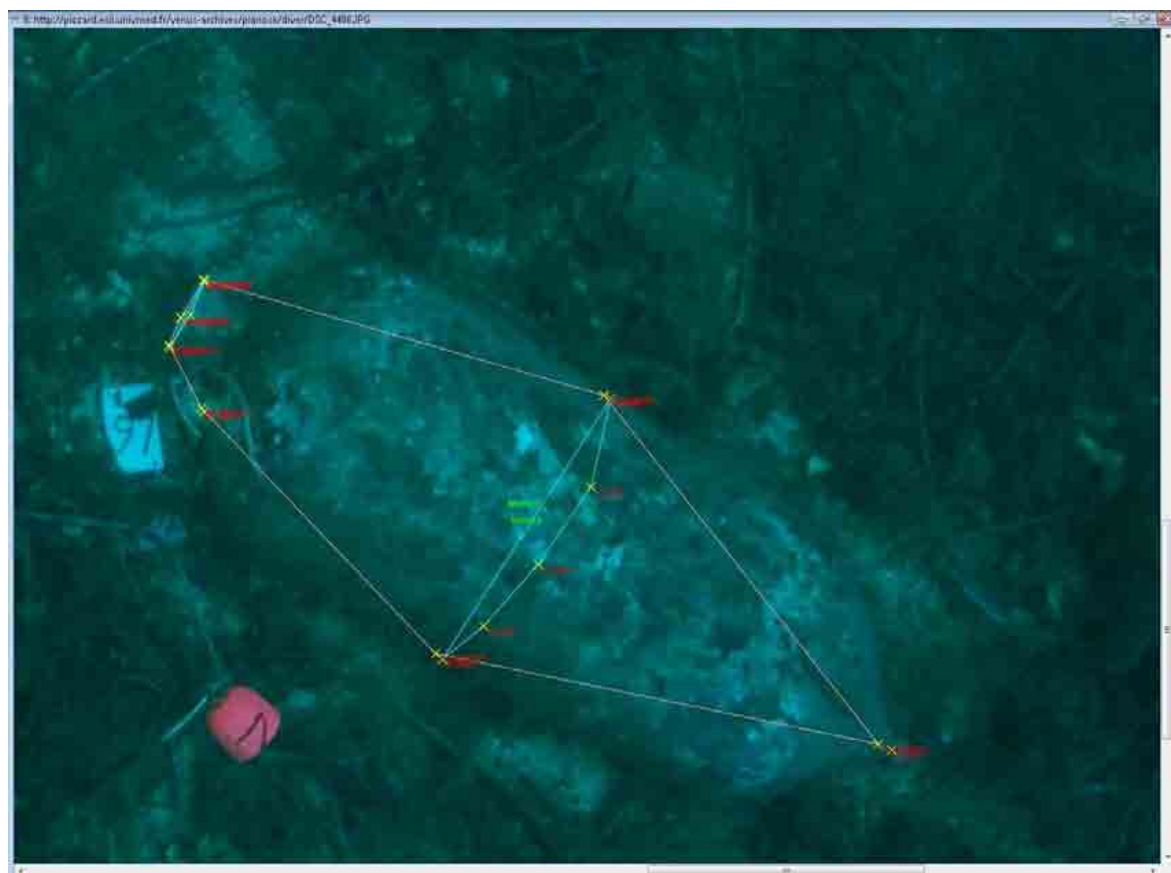


FIG. 12.3 – Panneau de visualisation des photographies.

par défaut - issues du modèle théorique. En cas de trop grande différence, nous pouvons déduire que soit la mesure est fausse, soit la valeur par défaut est inappropriée. Les attributs relatifs à la documentation de l'objet ne peuvent dans la plupart des cas pas être vérifiés automatiquement, c'est à l'utilisateur d'utiliser l'éditeur d'objets pour procéder à cette vérification.

Le deuxième onglet de l'éditeur d'objets est consacré à l'affichage du résultat de la restitution logique. Comme expliqué en 9.3.2, page 133, la mesure des objets repose sur une restitution logique qui utilise les résultats de l'inférence d'un système expert, appelés faits, afin de déterminer les calculs à utiliser. Les faits sont des informations très utiles pour le contrôle du bon déroulement de la mesure. Comme nous le voyons en figure 12.6, la table des faits permet de savoir quels faits étaient disponibles au départ de la restitution, quels faits ont pu être déduits et quels faits ne l'ont pas été. Si pour un objet un grand nombre de faits n'ont pu être déduit ou bien si beaucoup de faits déduits sont des faits par défaut, l'utilisateur peut vérifier les données photogrammétriques de l'objet afin de savoir s'il est possible de les affiner pour avoir un meilleur résultat lors de l'inférence du système expert. La table de restitution sert avant tout à donner des indications sur les moyens d'améliorer la restitution - et donc la mesure - des objets.

**Liens entre les composants** Les composants d'Ametist montrent des visions différentes d'une même chose : Un ensemble d'objets mesurés. La plupart des informations affichées étant liées, la sélection d'une information dans un composant entraîne également la sélection des informations liées dans les autres composants. Par exemple, la sélection d'un point 3D dans la table des points 3D entraîne la sélection automatique des points 2D correspondant dans la table des points 2D, la sélection des photographies sur lesquelles ont été mesurés ces points ainsi que la sélection de l'objet mesuré auquel appartiennent ces points. Ces sélections automatiques permettent à l'utilisateur d'avoir un point de vue global sur les informations qu'il utilise.



Item	Name	Id#	X	Y	Z	Photograph	Point 3D
Entiere 14r (1)	A_COL	2	2031.091	200.929		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4010....	A_COL 1
Entiere 14r (1)	A_COL	3	2050.781	205.144		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4010....	A_COL 2
Entiere 14r (1)	A_COL	4	2095.853	220.784		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4010....	A_COL 4
Entiere 14r (1)	A_COL	5	2097.948	217.042		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4010....	A_COL 5
Entiere 14r (1)	A_ANI	5	2059.045	463.584		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4010....	A_ANI 5
Entiere 14r (1)	A_ANI	5	2161.19	275.889		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4010....	A_ANI 5
Entiere 14r (1)	A_CHE	5	2253.746	759.167		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4010....	A_CHE 5
Entiere 14r (1)	A_CHE	5	2245.95	699.59		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4010....	A_CHE 5
Entiere 14r (1)	A_CHE	7	2280.426	957.122		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4010....	A_CHE 7
Entiere 14r (1)	A_CHE	8	2220.948	932.379		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4010....	A_CHE 8
Entiere 14r (1)	A_CHE	9	2262.841	920.058		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4010....	A_CHE 9
Entiere 14r (1)	A_CHE	10	2402.114	922.217		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4010....	A_CHE 10
Entiere 14r (1)	A_CHE	11	2452.912	931.587		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4010....	A_CHE 11
Entiere 14r (1)	A_CHE	12	2431.227	947.406		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4010....	A_CHE 12
Entiere 14r (1)	A_CHE	12	2311.206	956.932		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4010....	A_CHE 12
Entiere 14r (1)	A_COL	2	2031.0	211.1		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4011....	A_COL 1
Entiere 14r (1)	A_COL	3	2023.0	692.5		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4011....	A_COL 2
Entiere 14r (1)	A_COL	3	2051.5	669.8		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4011....	A_COL 3
Entiere 14r (1)	A_COL	4	2070.5	548.8		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4011....	A_COL 4
Entiere 14r (1)	A_COL	5	2091.5	830.5		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4011....	A_COL 5
Entiere 14r (1)	A_ANI	5	2054.5	794.5		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4011....	A_ANI 5
Entiere 14r (1)	A_ANI	5	2155.5	896.8		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4011....	A_ANI 5
Entiere 14r (1)	A_CHE	5	2234.0	1094.0		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4011....	A_CHE 5
Entiere 14r (1)	A_CHE	5	2255.0	1044.0		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4011....	A_CHE 5
Entiere 14r (1)	A_CHE	7	2291.0	1004.0		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4011....	A_CHE 7
Entiere 14r (1)	A_CHE	8	2233.0	979.8		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4011....	A_CHE 8
Entiere 14r (1)	A_CHE	9	2274.0	962.8		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4011....	A_CHE 9
Entiere 14r (1)	A_CHE	10	2412.0	958.8		http://pccard.eas.unimed.fr/venus-archives/pianosa/dive/DSC_4011....	A_CHE 10

Item	Name	Id#	X	Y	Z	Measured on	Projected on	Points 2D
Entiere 14r (1)	A_COL	2	909.966	907.081	-32.110	91, 92	none	A_COL 1, A_COL 4
Entiere 14r (1)	A_COL	2	909.878	906.981	-32.688	91, 92	none	A_COL 2, A_COL 2
Entiere 14r (1)	A_COL	3	909.995	906.945	-32.664	91, 92	none	A_COL 3, A_COL 3
Entiere 14r (1)	A_COL	4	909.914	906.999	-32.671	91, 92	none	A_COL 4, A_COL 4
Entiere 14r (1)	A_COL	5	909.928	906.964	-32.708	91, 92	none	A_COL 5, A_COL 5
Entiere 14r (1)	A_ANI	5	909.738	906.99	-32.689	91, 92	none	A_ANI 5, A_ANI 5
Entiere 14r (1)	A_ANI	5	909.932	906.797	-32.719	91, 92	none	A_ANI 5, A_ANI 5
Entiere 14r (1)	A_CHE	5	909.3	906.867	-32.694	91, 92	none	A_CHE 5, A_CHE 5
Entiere 14r (1)	A_CHE	6	909.259	906.959	-32.688	91, 92	none	A_CHE 6, A_CHE 6
Entiere 14r (1)	A_CHE	7	909.397	906.919	-32.57	91, 92	none	A_CHE 7, A_CHE 7
Entiere 14r (1)	A_CHE	8	909.413	906.767	-32.556	91, 92	none	A_CHE 8, A_CHE 8
Entiere 14r (1)	A_CHE	9	909.417	906.705	-32.565	91, 92	none	A_CHE 9, A_CHE 9
Entiere 14r (1)	A_CHE	10	909.499	906.634	-32.602	91, 92	none	A_CHE 10, A_CHE 10
Entiere 14r (1)	A_CHE	11	909.393	906.6	-32.62	91, 92	none	A_CHE 11, A_CHE 11
Entiere 14r (1)	A_CHE	12	909.371	906.59	-32.626	91, 92	none	A_CHE 12, A_CHE 12
Entiere 14r (1)	A_CHE	12	909.954	906.568	-32.686	91, 92	none	A_CHE 12, A_CHE 12
Entiere 14r (1)	CenterCircleUp	1	909.996	906.929	-32.746	91, 92	none	
Entiere 14r (1)	CenterCircleUp	1	909.33	906.728	-32.674	91, 92	none	
Entiere 14r (1)	CenterCircleUp	1	909.996	906.929	-32.746	91, 92	none	
Entiere 14r (1)	CenterCircleUp	1	909.33	906.728	-32.673	91, 92	none	
Entiere 14r (1)	CenterCircleUp	1	909.9962207981	906.92913987121	-32.7467667629314	91, 92	none	
Entiere 14r (1)	CenterCircleUp	1	909.32997063228	906.72785569454	-32.673186469944	91, 92	none	
Entiere 14r (1)	CenterCircleUp	1	909.9962207981	906.92913987121	-32.7467667629314	91, 92	none	
Entiere 14r (1)	CenterCircleUp	1	909.32997063228	906.72785569454	-32.673186469944	91, 92	none	

FIG. 12.4 – Tables des points 2D / 3D

S	Nom	Value	Default	Delta	Unit
Height	0.9688542021...	0.4794	-0.4894542...	undefined	
Length	0.3986901743...	0.175	-0.2236901...	undefined	
Width	0.3986901743...	0.1892	-0.2094901...	undefined	
Mass	11.0	11.0	0.0	undefined	
Volume	26.3	26.3	0.0	undefined	
DiamExt	0.161	0.161	0.0	undefined	
DiamInt	0.1156	0.1156	0.0	undefined	
DiamMax	0.3784	0.3784	0.0	undefined	
DiamPied	0.00356	0.00356	0.0	undefined	
HauteurLevre	0.032	0.032	0.0	undefined	

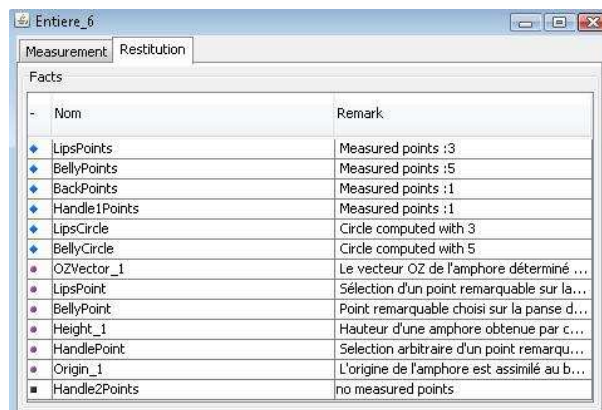
Location

X: 794.4909999999999 Y: 904.647 Z: -32.437000000000026

O: 4.659497248478283 P: 0.800913856335703 K: 4.0017824179934935

FIG. 12.5 – Editeur d'objets affichant les attributs des objets.

La visualisation des résultats est une étape nécessaire au contrôle de leur validité et de leur cohérence. Nous présentons maintenant une utilisation de l'interface d'Ametist axée sur la détection d'incohérences dans les résultats ainsi que sur la fusion de plusieurs résultats issus de différentes sessions de mesures.



Nom	Remark
LipsPoints	Measured points :3
BellyPoints	Measured points :5
BackPoints	Measured points :1
Handle1Points	Measured points :1
LipsCircle	Circle computed with 3
BellyCircle	Circle computed with 5
OZVector_1	Le vecteur OZ de l'amphore déterminé ...
LipsPoint	Sélection d'un point remarquable sur la...
BellyPoint	Point remarquable choisi sur la panse d...
Height_1	Hauteur d'une amphore obtenue par c...
HandlePoint	Sélection arbitraire d'un point remarqu...
Origin_1	L'origine de l'amphore est assimilée au b...
Handle2Points	no measured points

FIG. 12.6 – Editeur d'objets affichant la table des faits.

## 12.3 Détection d'incohérences et fusion des résultats

La fusion d'ensembles de résultats est un problème complexe. Dans la plupart des cas, une simple aggrégation n'est pas une solution adaptée car des incohérences sont présentes dans les différents résultats sous forme de conflits entre des objets ou d'incohérences par rapport au modèle théorique.

### 12.3.1 Outil de détection d'incohérences

Ces incohérences sont dues à deux causes principales. Comme nous l'avons déjà exprimé, la restitution complète d'un site peut être composée de plusieurs restitutions faites par des opérateurs différents, pour des parties du site différentes. Dans ce cas, des erreurs d'identification des objets mesurés sont souvent commises, comme par exemple deux objets différents étant identifiés de manière identique, ou inversement, un objet unique mesuré plusieurs fois avec des identificateurs différents. Lors de la restitution d'un site archéologique sous-marin d'une épave comportant un grand nombre d'amphore du même type ce genre d'erreur apparaît régulièrement.

La seconde cause d'incohérence est l'étalement dans le temps des sessions de restitutions. Un site peut être étudié durant un long intervalle de temps et l'éloignement entre les observations sur site (prises de vues, fouille) et la restitution par l'opérateur peut amener de l'incohérence (modèle théorique révisé, site modifié intentionnellement ou non).

Comme nous le voyons dans la figure 12.7, les deux principales causes d'incohérence ne sont pas forcément disjointes. Le rectangle en pointillés fin montre deux résultats fournis par un même utilisateur mais à deux dates différentes. Le second rectangle montre trois résultats obtenus par trois utilisateurs différents dans un intervalle de temps assez court. Les deux rectangles s'intersectent car si tous les résultats produits doivent être fusionnés, les deux types d'incohérences doivent être résolus en même temps. Prenons l'exemple de la restitution d'amphores.

**Exemple 33** *Pendant une restitution faite par un seul opérateur, celui-ci peut avoir mesuré deux fois ou plus la même amphore sur des couples de photographies différents. Au final, le résultat global contient des objets mesurés représentant le même objet du site mais avec des identificateurs différents et des données photogrammétriques différentes. Cependant, un seul objet mesuré doit être présent dans les résultats pour représenter un objet du site. Il faut donc choisir un des objets mesurés ou bien créer un nouvel objet résultat de la fusion des objets en conflit.*

Les informations issues de la mesure photogrammétrique sont précieuses. En effet, les relevés sur sites ne sont pas tout le temps possible et les restitutions par un opérateur demande du temps de travail. Même si un objet mesuré est écarté ou si un nouvel objet mesuré issu de la fusion de plusieurs autres objets est instégré



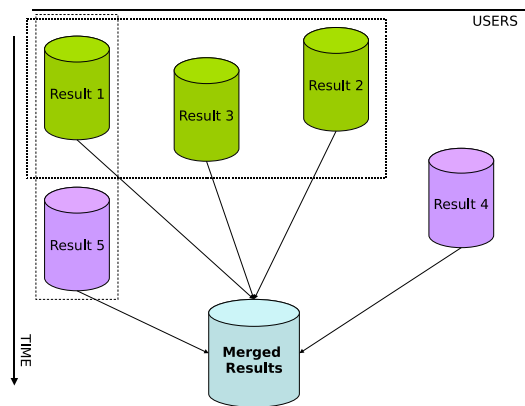


FIG. 12.7 – Combinaison des causes d'incohérence

au résultat final, un historique des objets mesurés étant entrés en jeu dans la création du résultat final doit être maintenu. Cet historique permet de retracer le processus de fusion de revenir en arrière si un résultat final ne convient pas.

Procéder à la fusion de résultats nécessite un formalisme adapté. Ce formalisme est décrit au chapitre 10, page 135 traitant de la représentation d'objets mesurables basée sur les entités. La fusion dans ce formalisme est décrite au chapitre 11, page 145.

L'interface d'Ametist permet d'y intégrer un outil de pilotage de la fusion de résultats. Cet outil possède deux fonctions principales :

- Détecter et exprimer les incohérences entre des résultats
- Fusionner des résultats

Les résultats produits par Arpenteur sont composées de photographies orientées, de points 2D / 3D, de modèles 3D, de valeurs de mesures et de documentation. L'outil de pilotage utilise le lien entre toutes ces informations proposé par Ametist afin d'aider l'utilisateur dans la recherche d'incohérences et dans la détermination des moyens de corriger celles-ci. Comme nous l'avons vu précédemment, la sélection d'un objet mesuré dans l'interface permet d'accéder rapidement à toutes les informations qui lui sont attachées. Cette sélection s'applique également à un ensemble d'objets.

La détection automatique d'incohérences lors de l'aggrégation de résultats est accessible par une commande spécifique dans le panneau dédié <sup>2</sup>. Les ensembles d'objets incohérents définis formellement par  $\Theta^I$  et  $\Theta^E$  (chapitre 11, page 148) sont calculés et affichés de façon compréhensible par l'utilisateur, comme illustré en figure 12.8. A partir de ces rapports, l'utilisateur peut rechercher les raisons ayant amenées l'incohérence et mettre en place des solutions adaptées. Dans certains cas, une simple réidentification des objets peut suffire. Dans d'autres, la suppression d'objets redondants est pertinente. Dans les cas les plus difficiles, une nouvelle restitution de l'objet est nécessaire. La pire raison d'incohérence réside dans une mauvaise orientation des photographies ou dans des erreurs durant la phase de digitalisation, car la solution au problème est alors de recommencer des prises de vues ou de réorienter les photographies, ce qui entraîne un nouveau processus de restitution.

L'outil de détection d'incohérences utilise la connaissance experte pour exprimer les objets incohérents ainsi que les causes probables de ces incohérences. Cependant, dans le cas où les objets à traiter sont en très grand nombre ou si les incohérences sont facilement corrigibles (comme des problèmes d'indentification), un outil de fusion automatique peut être utilisé.

<sup>2</sup>voir 12.2.1, page 168

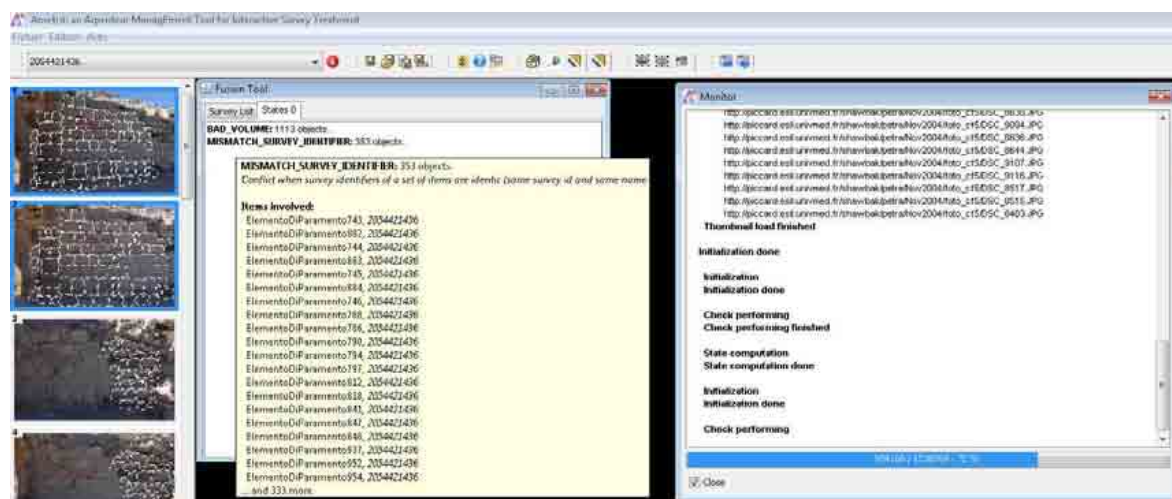


FIG. 12.8 – Ametist detection report



## Chapitre 13

# Relevé du site de Pianosa pour le projet Venus

### Contents

---

<b>13.1 Le projet VENUS : Virtual ExploratioN of Underwater Sites . . . . .</b>	<b>178</b>
<b>13.2 Description du relevé du site de Pianosa . . . . .</b>	<b>178</b>
<b>13.3 Aquisition des données . . . . .</b>	<b>179</b>
13.3.1 Relevé sonar . . . . .	179
13.3.2 Relevé photogrammétrique . . . . .	179
<b>13.4 Utilisation d’Ametist pour la gestion et le contrôle des données . . . . .</b>	<b>181</b>
<b>13.5 Résultats . . . . .</b>	<b>183</b>

---

## Introduction

Nous présentons maintenant une expérimentation réelle dans le cadre du relevé d'un site sous-marin sur l'île de Pianosa, première mission au sein du projet IST VENUS effectuée en octobre 2006.

Après une description des activités de la mission et des méthodes d'acquisition de données, nous présentons l'utilisation de l'application Ametist pour le contrôle et la gestion des relevés du site.

### 13.1 Le projet VENUS : Virtual Exploration of Underwater Sites

Le projet VENUS a pour but de fournir des méthodologies scientifiques et des outils technologiques pour l'exploration virtuelle de sites archéologiques sous-marins profonds.

Les sites archéologiques sous-marins profonds, comme par exemple les épaves, sont d'extraordinaires opportunités pour les archéologues en raison de facteurs tels que l'obscurité, de basses températures et un faible taux d'oxygène dans l'eau qui favorisent la conservation des objets archéologiques. En revanche, ces sites ne peuvent pas être étudiés facilement et sont aujourd'hui menacés par des activités telles que la pêche profonde qui détruit la surface des sites.

Le projet VENUS doit permettre d'améliorer l'accessibilité aux sites sous-marins en construisant des représentations 3D documentées exhaustives pour une exploration virtuelle.

L'équipe du projet compte étudier des épaves à différentes profondeurs et explorer des méthodes et techniques avancées pour l'acquisition de données comme les véhicules autonome ou téléguidés (ROV / AUV) munis d'équipements de sonar et de photogrammétrie innovant. La recherche couvre également les besoins en traitement et sauvegarde des données recueillies, en interface de mesure d'objets archéologiques et en système de gestion d'information.

VENUS est aussi axé sur le développement d'outils de réalité virtuelle et de réalité augmentée pour une visualisation et une interactivité immersive avec le modèle numérique d'un site archéologique. Le modèle est accessible en ligne afin d'être utilisé par exemple à la fois comme un exemple de conservation numérique mais aussi comme un moyen d'exploration sans danger de site sous-marins. Ces deux activités représentant un faible coût et permettant de mettre en place un environnement pédagogique. Un site sous-marin virtuel fournit également aux archéologues un moyen efficace de partager les données recueillies avec le grand public au moyen par exemple de plongée virtuelles.

Le Consortium de VENUS, composé de 11 partenaires répartis dans toute l'Europe, met en commun des expertises issues de différents domaines tels que l'archéologie, l'exploration sous-marine, la représentation des connaissances, la photogrammétrie, la réalité virtuelle et la préservation numérique de données.

### 13.2 Description du relevé du site de Pianosa

Le site de Pianosa a été découvert en 1989 par les plongeurs Giuseppe Adriani et Paolo Vaccari. Il est localisé par 35 mètres de fond près de *Scoglio della Scola*, sur la côte est de l'île de Pianosa. L'île de Pianosa fait partie de l'archipel de Toscane et se situe à 14 km au sud-est de l'île d'Elbe. La figure 13.1 indique la localisation de l'île de Pianosa et la localisation du site. D'une superficie de 1025 hectares, elle était habitée déjà dans l'antiquité comme en témoigne les nombreuses ruines à terre.

Le site sous-marin étudié est caractérisé par la présence estimée d'une centaine d'amphores de différentes origines et époques. Les typologies d'amphores vont de la *Dressel 1A* à la *Beltrán 2B* et la *Dressel 20* en passant par des typologies *Afriquaines*. Des études antérieures du site ont démontré qu'il est encore intact. Cependant, ces études n'ont pu être approfondies et la nature même du site n'avait pas pu être déterminée avec certitude.

Au regard de la documentation déjà existante sur le site (dessins de Claudio Ruffili en 1989 et 1991, étude préliminaire du site par Roberto Bonaiuti et Emiliano Africano en septembre 2006), des conditions de visibilité excellentes et de la profondeur du site assez faible, ce site se prête à un relevé photogrammétrique.

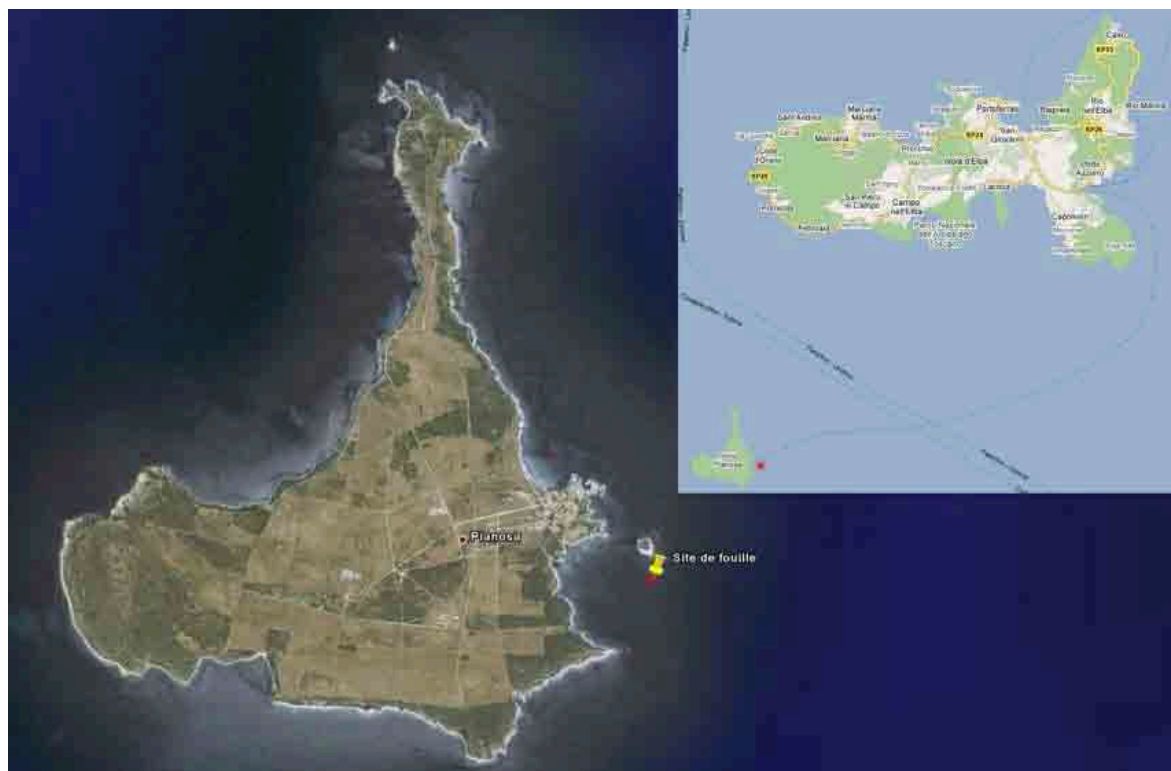


FIG. 13.1 – Localisation du site et de l'île de pianosa, au sud de l'île d'Elbe

### 13.3 Aquisition des données

L'aquisition des données pour le relevé du site a été faite en utilisant la photogrammétrie et un relevé sonar du site. Le relevé sonar a été utilisé pour produire un modèle numérique de l'ensemble du site et la photogrammétrie a été utilisée pour la mesure des amphores présentes.

#### 13.3.1 Relevé sonar

Le relevé sonar a été accompli par la société Geosystem qui a couvert une large partie du site afin d'obtenir une modélisation du fond. La figure 13.2 représente le résultat du relevé bathymétrique. La zone bleue en bas à gauche est la zone du relevé photogramétrique.

#### 13.3.2 Relevé photogramétrique

le relevé photogramétrique est basé sur un ensemble de photographies. La procédé de prise de vue est très similaire à la prise de vue pour la photogrammétrie aérienne. La différence principale est la distance entre la caméra et les objets ainsi que l'immersion dans l'eau. Les photographies sont prises par bandes parallèles avec un recouvrement de 60% entre les photographies successive dans la bande et un recouvrement de 20% d'une bande à l'autre. La figure 13.3 illustre deux photographies successives d'une même bande.

Les prises de vues sont réalisées par un plongeur mais aussi par le ROV *Phantom S2* de l'ISME. Le système de prise de vue du ROV est composé d'une camera Nikon D2H dans un caisson à lentille plane, fournis par la COMEX. Les prises de vues obtenues par le ROV sont utilisées afin de développer un nouveau système d'orientation des photographies en temps réel, elles ne sont donc pas utilisées pour mesurer les objets. Une fois l'ensemble des prises de vues effectué, l'orientation des photographies est accompli en utilisant le logiciel PhotoModeler©. L'orientation permet d'obtenir la position des photographies dans l'espace, comme nous le

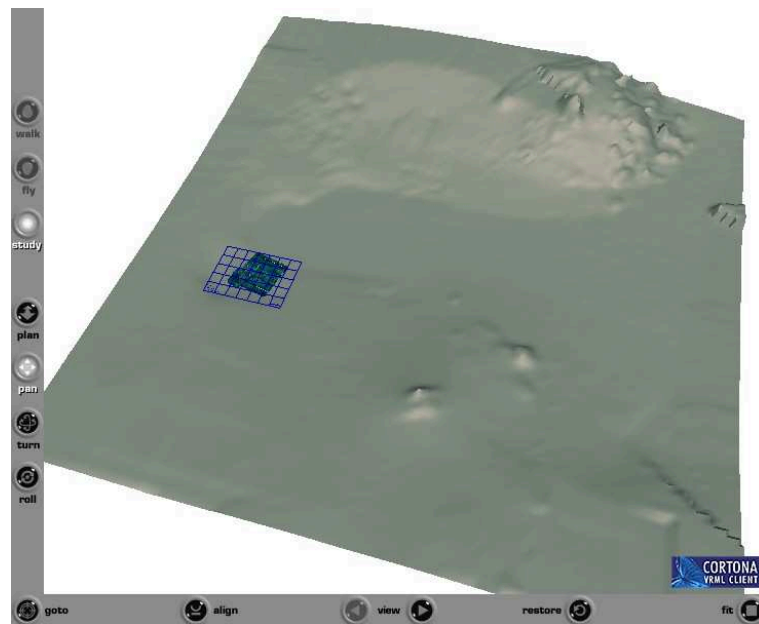


FIG. 13.2 – Relevé bathymétrique du site. En bas à gauche nous apercevons la zone de 20mx20m où se trouvent les amphores



FIG. 13.3 – Deux photographies successives dans une bande

voyons en figure 13.4. Pour plus de détails sur la phase d'orientation, se reporter à la section 9.1.2, page 129. Les photographies orientées sont stockées dans une base de données afin d'être utilisable par le module de mesure d'Arpenteur. A partir de cette base, l'utilisateur procédant à la mesure des objets bénéficie d'une interface lui permettant simplement de choisir les photographies sur lesquelles il désire mesurer des objets. Comme nous pouvons le voir en figure 13.5. La mesure des objets est faite à partir de deux photographies. Une fois celles-ci sélectionnées, l'utilisateur peut mesurer de nouvelles amphores ou de nouveaux fragments d'amphores. L'interface de mesure est simplifiée grâce à la connaissance des objets. Pour mesurer une amphore, l'utilisateur doit marquer des points homologues sur certaines zones de l'amphore (col, anses, panse, fond). Si ces zones sont invisibles ou si l'amphore est brisée, le module de restitution affecte des valeurs par défaut aux attributs morphologiques dont les mesures ne peuvent être calculées depuis des observations. La figure 13.6 représente l'interface de mesure des amphores telle qu'elle se présente à l'utilisateur.

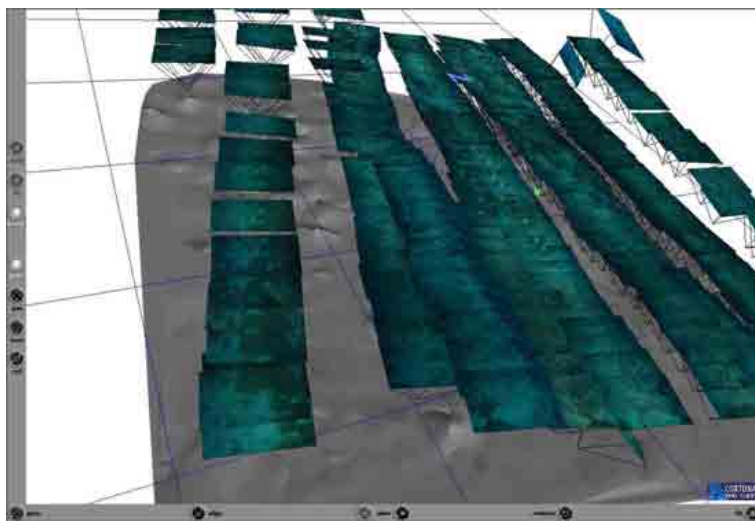


FIG. 13.4 – Photographies orientées

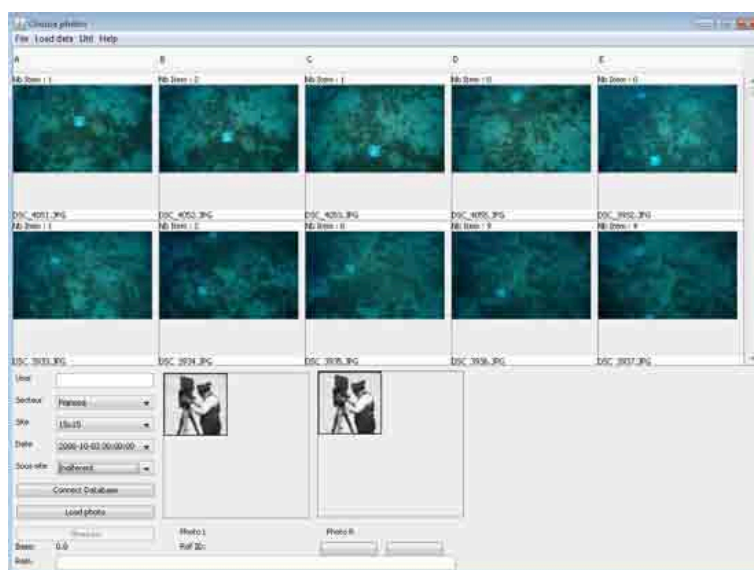


FIG. 13.5 – Interface de choix des photographies pour la mesure

### 13.4 Utilisation d'Ametist pour la gestion et le contrôle des données

Le relevé complet du site de pianosa comprend 293 photographies orientées, 40 amphores et 25 fragments mesurés. Bien que le nombre totaux d'objets mesurés soit faible, l'entassement des amphores a demandé un moyen de contrôle efficace des résultats. Ce moyen de contrôle doit permettre à la fois la visualisation de données numériques, géométriques, textuelles mais aussi de les lier. Le module Ametist a permis d'optimiser les contrôles sur la validité des résultats et d'aider l'utilisateur lors de la phase de mesure. Comme le montre la figure 13.7, toutes les informations disponibles sont accessibles facilement dans une même interface. De plus, le module de détection d'incohérences a permis par exemple de détecter des erreurs de mesure mais aussi des erreurs dans l'affectation de typologie à certaines amphores mesurées. La figure 13.8 montre un rapport de détection d'incohérence. Nous y voyons que 43 on un problème de longueur de boîte englobante parallèle aux





FIG. 13.6 – Interface de mesure des amphores

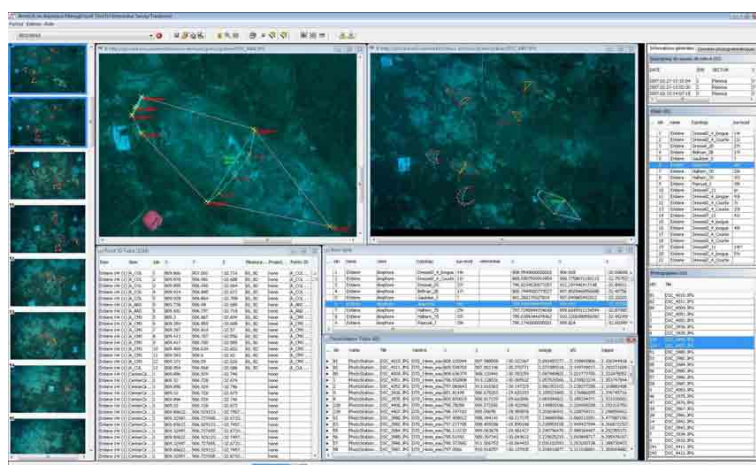


FIG. 13.7 – Vue générale de l'interface d'Ametist

axes.

Ce problème apparaît si plusieurs objets ont des boîtes englobantes qui sont en collision. Dans le cas de la mesure d'amphore, détecter ce problème n'est pas déterminant car la répartition des objets sur le site implique la collision de leur modèles géométriques, surtout entre des fragments et des amphores entières.

Un autre problème détecté par la violation de trois contraintes. 9 amphores ont une longueur, une largeur et une hauteur invalides. C'est à dire que les valeurs de ces trois attributs morphologiques ne sont pas dans les plages de valeurs autorisées. Ce problème signifie que soit les 9 amphores ont été mal mesurées, soit la typologie que l'on a associé à ces amphores est erronée. Selon le site étudié, il est difficile d'affecter précisément une typologie à une amphore car deux typologies peuvent être très proches et il est fréquent de ne voir que partiellement les amphores. Bien qu'une incohérence de ce type devrait être détectée directement lors de la mesure des amphores, il est dans la pratique souvent utile de ne pas procéder à la vérification de la typologie à cet instant. En effet, les typologies des amphores d'un sites sont souvent définies peu de temps avant voire même durant le relevé. La mesure peut donc s'effectuer dans un premier temps en affectant à l'amphore une typologie qui n'est pas forcément la sienne. Le changement de typologie d'une amphore peut être fait à posteriori et ne nécessite pas une nouvelle session de mesure mais simplement une nouvelle restitution basée sur les mêmes observations.

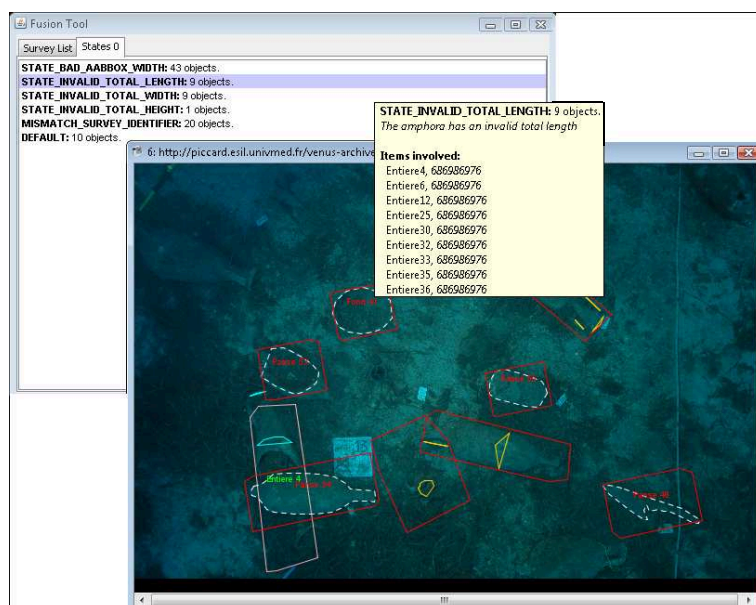


FIG. 13.8 – Rapport de détection d'incohérences dans l'interface d'Ametist

La détermination exacte des causes du problème de typologie n'est pas réalisable automatiquement. Les moyens de contrôle de la validité des mesures ne peuvent pas à eux seuls permettre de déterminer si l'erreur observée vient d'une mauvaise mesure ou d'une mauvaise typologie. L'expert responsable de la mesure des objets doit alors trouver une solution au problème en s'appuyant sur les rapport de détection. Dans ce cas précis, le problème est dû à une mauvaise affectation de typologie. De nouvelles observations des photographies ont permis de réaffecter les typologies correctement.

Le dernier problème est un problème courant lors de relevés. Il s'agit d'erreurs d'identifications des amphores. En effet, 20 amphores portent le même identifiant. Cette erreur est due au fait que lors de la mesure, l'utilisateur n'était pas en mesure d'identifier les amphores grâce aux marqueurs présents sur celles-ci. Le système a corrigé automatiquement ce problème en réidentifiant de manière unique les amphores.

## 13.5 Résultats

Le but du relevé du site de Pianosa était d'obtenir une représentation 3D permettant la localisation des amphores et des fragments ainsi que la visualisation des différentes typologies présentes. Celle-ci propose une représentation 3D des amphores en associant à chaque typologie une couleur différente. Le fond du site est également représenté par un maillage texturé à partir des photographies utilisées pour le relevé photogrammétrique.



## Chapitre 14

# Evaluation des ressources de corail rouge en Algérie

### Contents

---

14.1 Introduction . . . . .	186
14.2 Déroulement du projet . . . . .	186
14.3 Relevés photogrammétriques . . . . .	186
14.4 Gestion des données avec Ametist . . . . .	187
14.5 Résultats . . . . .	189

---

## 14.1 Introduction

Nous présentons maintenant une utilisation des outils développés dans le cadre d'un projet d'évaluation des ressources de corail rouge du littoral algérien. Ce projet a été mis en place par le gouvernement algérien afin de planifier une gestion efficace des ressources de corail rouge dans ses eaux territoriales. Cette évaluation doit permettre de définir des quotas de pêche à appliquer pour le corail rouge. Le consortium du projet est composé de deux laboratoires du CNRS : le LSIS (umr 6168) et le DIMAR (6540), de deux sociétés : CREOCEAN et COMEX et de l'université de la méditerranée.

Le contrat de projet contenant une clause de confidentialité, nous ne publions pas ici les résultats définitifs. Nous décrivons les techniques mis en place pour répondre au besoin en mettant l'accent sur le relevé photogrammétrique de sites coraliens puis nous illustrons l'utilisation d'outils de gestion des données.

## 14.2 Déroulement du projet

Le projet d'évaluation est divisé en trois phases :

**Phase 1 : réalisation d'une étude préliminaire.** Il s'agit de synthétiser les connaissances disponibles sur le sujet. Durant cette phase sont définis ou ajustés les modèles pour le relevé photogrammétrique des sites.

**Phase 2 : acquisition de nouvelles données (mission de terrain).** Cette phase porte sur l'étude de la distribution du corail rouge et la connaissance de la dynamique des populations (densité des colonies, structure de population, vitesse de croissance).

**Phase 3 : synthèse et production d'un plan de gestion pour l'exploitation de la ressource.** Cette dernière phase mène à la réalisation d'outils d'aide à la décision pour l'exploitation ultérieure du corail rouge.

Notre travail est situé durant la phase 2. Afin d'étudier la distribution du corail rouge, des relevés photogrammétriques de différents sites sont effectués. Les sites sélectionnés sont au nombre de 8 et répartis le long des côtes algériennes. Les relevés ne sont pas utilisés ici pour produire une représentation 3D des sites mais pour mesurer des valeurs particulières sur un grand nombre de colonies de corail rouge.

## 14.3 Relevés photogrammétriques

Les relevés photogrammétriques effectués durant le projet d'évaluation suivent tous le même protocole. Chaque site à relever est assimilé à un quadrat (carré tubulaire de 30cm de côté) placé dans une zone corallienne. Les colonies de corail contenues dans le quadrat sont mesurées par photogrammétrie. La technique de prise de vue utilisée ici est basée sur des couples de photographies.

L'intervention sur les sites est faite par des plongeurs depuis le navire d'océanographie Janus II de la COMEX. Chaque plongée est effectuée par équipe de deux plongeurs : l'un plaçant les quadrats, le deuxième étant affecté à la prise de vue. Selon les sites la profondeur de travail des plongeurs se situe entre 30 et 60 mètres. La figure 14.1 montre un couple de photographie associé à un quadrat.

Une fois la mission in situ effectuée et l'ensemble des photographies disponible, l'orientation est effectuée. Dans ce projet, les sites (quadrats) sont indépendants et il n'existe aucun moyen de les représenter tous ensemble. Les orientations et les mesures sont donc effectuées indépendamment pour chaque quadrat. L'orientation de couples de photographies peut être accomplie directement avec le logiciel Arpenteur et ne nécessite pas d'outil tiers. Lorsque toutes les photographies sont orientées, elles sont stockées dans une base de données. Les colonies contenues dans les quadrats sont alors mesurées en utilisant l'interface d'Arpenteur. Comme nous le voyons en figure 14.2, l'interface de gestion des photographies est la même que celle utilisée pour le relevé du site du Pianosa. La différence pour l'utilisateur est qu'ici, lorsqu'une photographie est sélectionnée, la deuxième photographie formant un couple avec celle-ci est automatiquement sélectionnée. Cela évite un travail fastidieux de reconnaissance de couples.

Un fois le bon couple de photographies voulu choisi, la session de mesure est effectuée grâce à une interface dédiée au corail. Comme pour les amphores, cette interface s'appuie sur un modèle qui définit les zones à



FIG. 14.1 – Un couple de photographie montrant un quadrat

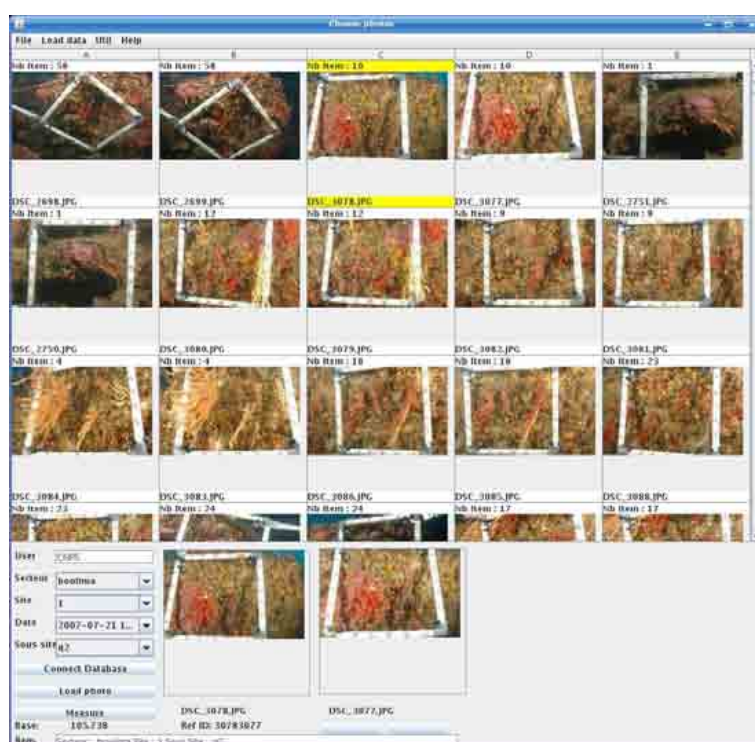


FIG. 14.2 – Interface de gestion des photographies

mesurer (base, diamètre de la base, extrémité de branches). Le module de restitution ne reconstruit pas les coraux mesurés. Contrairement aux amphores, la restitution d'une colonie de corail est purement numérique. Des valeurs par défaut réalistes ne pouvant être définies pour l'ensemble des colonnies. La figure 14.3 illustre l'interface de mesure dédiée au relevé d'un site corallien.

## 14.4 Gestion des données avec Ametist

Le relevé des 8 sites a nécessité la mesure de 870 colonnies réparties dans 163 quadrats et 326 photographies. La vérification de la validité des colonnies a été effectuée grâce à l'interface d'Ametist, comme illustré en figure 14.4. Contrairement au site de Pianosa, les colonnies mesurées sont en nombre important, cependant, les incohérences à détecter sont de nature différentes. Les relations spatiales entre les colonnies ne sont pas déterminantes car elles ne sont pas toutes dans le même référentiel et la géométrie même des colonnies est très complexe (enchevêtrement entre colonnies). En revanche, un contrôle de cohérence sur les valeurs mesu-



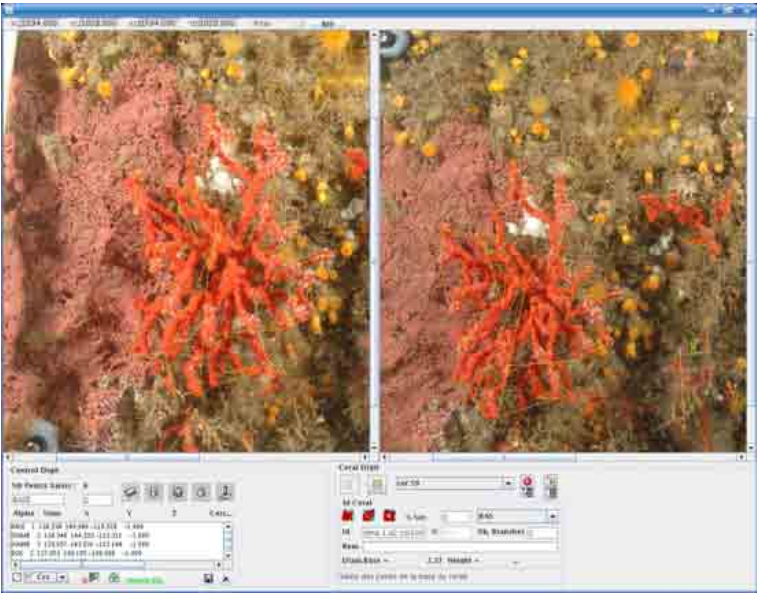


FIG. 14.3 – Interface de mesure de colonies de corail

réels permet de montrer les colonnies invalides. Le contrôle d'une identification correcte est aussi très utile lors de la gestion d'un grand nombre de colonnies. En plus de la détection d'incohérences, le module de gestion d'Ametist permet d'exporter les données vers divers supports (fichiers XML, base de données, fichier Excel® ou encore classeurs OpenOffice).

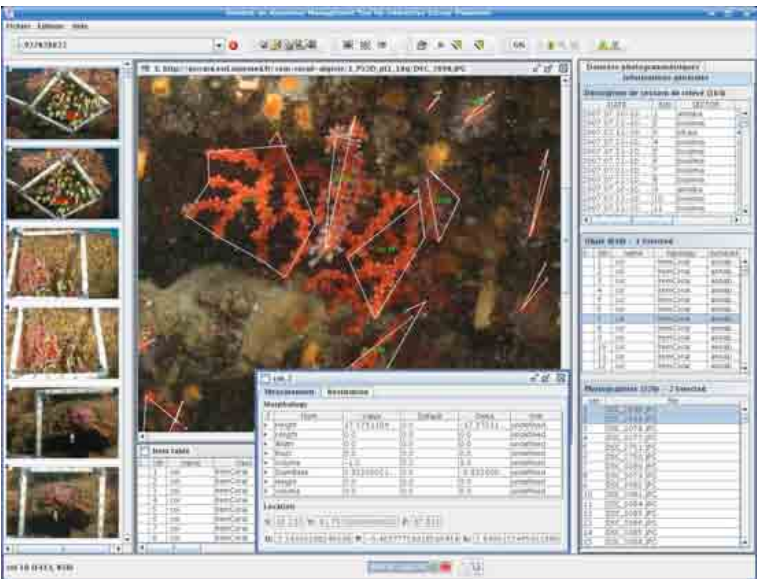


FIG. 14.4 – Interface de contrôle des colonies de corail

## 14.5 Résultats

Les résultats obtenus grâce au relevé des sites algériens sont composés d'un ensemble de mesures sur chacune des 870 colonnies. Ces mesures sont exportées dans différents formats afin d'être traitées ensuite par les chercheurs en biologie marine du CNRS. Le principal support de publication des résultats est le classeur excel® qui peut être directement utilisé pour des posts traitements (étude statistique, répartition, ...).





## Chapitre 15

# Conclusion générale et développements futurs

### 15.1 Conclusion

Les travaux exposés dans cette thèse se situent dans le domaine de la mesure guidée par la connaissance. et s'articulent autour des trois axes suivant :

- la définition d'un cadre réversible pour la fusion de connaissances ;
- l'intégration des techniques de fusion et de détection d'incohérence au sein d'un ensemble d'outils de mesure photogrammétrique fondée sur la connaissance ;
- le développement d'applications utilisables en conditions réelles pour la gestion de relevés photogrammétriques.

#### 15.1.1 Définition d'un cadre réversible pour la fusion

D'un point de vue théorique, nous avons proposé un cadre réversible pour la fusion de connaissance. Avec ce nouveau cadre il est possible de fusionner des connaissances tout en ayant la possibilité de retrouver à partir du résultat de la fusion les connaissances initiales. Le cadre réversible est exprimé sémantiquement grâce à la définition de fonctions de pondération des interprétations et des états épistémiques reposant sur les polynômes. La fusion est obtenue en grâce à une fonction de pondération globale elle même basée sur les polynômes et à la définition d'un pré-ordre sur les poids globaux représentant la stratégie de fusion. La fonction de pondération globale est telle qu'il est possible à partir d'un poids global de retrouver les poids des interprétations pour chaque état épistémique original. A partir des poids des interprétations originales, il est ainsi possible de reconstruire les états épistémiques originaux. Le cadre réversible est également exprimé syntaxiquement à partir de bases de formules stratifiées pour lesquelles chaque formule est associée à un polynôme représentant son poids. La première étape de la fusion est la construction d'une base stratifiée globale composée de toutes les disjonctions possibles entre les formules provenant des bases de croyances stratifiées originales. Chaque disjonction créée est pondérée par un polynôme construit à partir des poids des formules en disjonction. Le résultat de la fusion est obtenu en sélectionnant les disjonctions de poids maximal suivant un pré-ordre sur les polynômes représentant une stratégie de fusion. Tout comme dans l'approche sémantique, la réversibilité permet de retrouver les poids des formules originales à partir des poids globaux des disjonctions et ainsi de reconstruire les bases de croyances stratifiées originales [78, 80].

Après l'expression de notre cadre réversible dans l'approche sémantique et dans l'approche syntaxique, nous avons montré l'équivalence de la fusion dans les deux approches. Cette équivalence permet d'affirmer que si l'on dispose un ensemble  $\mathcal{B}$  de bases stratifiées équivalent à un ensemble  $\Psi$  d'états épistémiques, alors la fusion de l'ensemble des bases de croyances stratifiées de  $\mathcal{B}$  selon une stratégie choisie est équivalente à la fusion de l'ensemble d'états épistémiques  $\Psi$  selon cette même stratégie. Un algorithme de construction d'une base de croyances stratifiées équivalente à un état épistémique a été proposé afin d'automatiser le processus de passage d'une approche à l'autre. La figure 15.1 illustre la contribution théorique de ce travail.

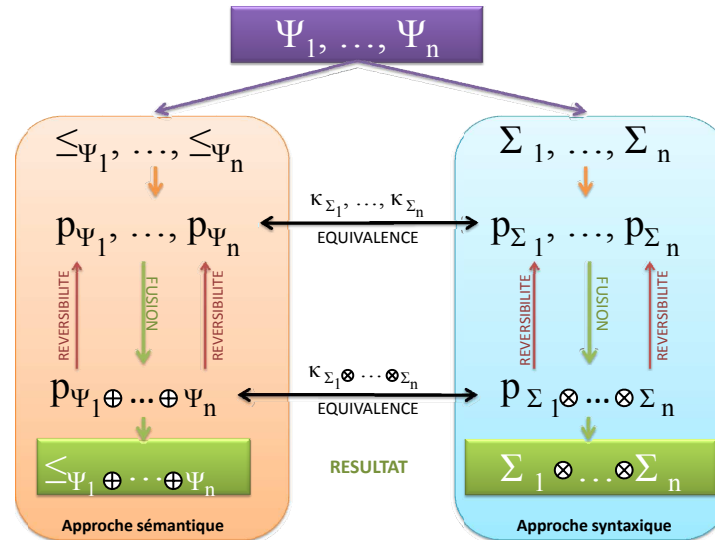


FIG. 15.1 – Cadre réversible et équivalence entre les approches sémantique et syntaxique

### 15.1.2 Utilisation des techniques de fusion pour la construction d'un outil de gestion de relevés photogrammétriques

Ce travail de thèse a pour contexte la mesure photogrammétrique fondée sur la connaissance. L'outil Arpenteur permet de mesurer des objets en se basant sur des modèles théoriques pour simplifier le processus de mesure et guider l'utilisateur lors des relevés. Ce travail contribue au développement d'Arpenteur en proposant un formalisme de représentation des objets.

Ce formalisme est basé sur les entités, extension du modèle Objet initial d'Arpenteur, intégrant la définition de relations entre objets et de contraintes intrinsèques sur les objets et de contraintes extrinsèques sur les relations entre objets. La notion de cohérence d'un ensemble d'objets caractérisé par une entité et définie par le respect des contraintes intrinsèques et extrinsèques. Nous avons proposé la représentation d'un ensemble d'objets caractérisés par une entité dans le formalisme de la logique des prédicats. Les contraintes intrinsèques sont représentées par des prédicats unaires, les relations entre objets par des prédicats binaires et les contraintes extrinsèques par des formules. L'ensemble des objets forme les variables. Les objets étant en nombre fini, l'instanciation des relations et des contraintes peut se ramener à un ensemble de formules propositionnelles.

A partir de la formalisation en logique des prédicats d'un ensemble d'objets caractérisé par une entité, nous avons proposé deux méthodes de détection d'incohérence. La première méthode utilise une matrice carrée indicée par les objets dans laquelle chaque case correspond à la validation ou non d'un ensemble de contraintes. Une fois la matrice créée, son parcours permet de retrouver les objets impliqués dans l'incohérence. La seconde méthode est basée sur la révision par les R-ensembles. Cette méthode confronte l'instanciation réelle des contraintes d'une entité sur un ensemble d'objet avec les contraintes telles qu'elles devraient êtreinstanciées pour que l'ensemble d'objets soit cohérent. Cette confrontation est équivalente à la révision des observations par un modèle. Les R-ensembles pour la révision permettent de sélectionner l'ensemble minimal d'objets incohérents à traiter pour rétablir la cohérence dans l'ensemble d'objet initial. Une solution prudente est de choisir comme traitement le retrait des objets incohérents. Cependant, la mesure représentant un coût important en moyen et en temps, la perte d'objets mesurés doit être minimale. La solution alors mise en place dans le cas réel et d'utiliser les capacité de détection d'incohérences des algorithmes proposés précédemment pour guider un expert dans la gestion des objets et dans la fusion de plusieurs ensembles d'objets.

### 15.1.3 Développement d'applications utilisables en conditions réelles pour la gestion de relevés photogrammétriques

Les utilisateurs d'Arpenteur ne sont pas forcément des spécialistes de la photogrammétrie ou de l'informatique. La possession d'algorithmes permettant de détecter les objets impliqués dans l'incohérence d'un ensemble de résultats n'est pas suffisant pour être accepté comme une solution complète au problème. La gestion de l'incohérence et des objets impliqués par celle-ci est du ressort de l'expert. Nous avons mis en place un outil étendant Arpenteur et permettant à l'utilisateur de contrôler par lui-même, de façon efficace, la cohérence d'un relevé. Les méthodes de détection d'incohérence développées de manière formelles sont intégrées dans ce nouvel outil afin d'aider l'utilisateur à piloter le processus de contrôle.

Cet outil de contrôle a été utilisé lors d'expérimentations réelles comme la fouille du site de Pianosa [40, 27, 68] où il a permis de détecter et corriger des erreurs de diverse nature. Bien que sorti du contexte archéologique, Ametist a été utilisé lors du relevé de sites coralliens sur le littoral algérien. Là aussi, il a permis de détecter des erreurs et indiquer aux responsables du relevé des pistes pour le rétablissement de l'incohérence [26].

## 15.2 Développements futurs

Les développements futurs de ce travail s'ouvrent sur deux axes. Le premier axe, le plus formel, se compose de branches telles que l'expression de nouvelles techniques de fusion dans le cadre réversible. Après la fusion à base de distance et la révision réversible, il est naturel d'envisager l'expression d'approches telles que la fusion en logique possibiliste. Toujours au niveau formel, la définition de nouveaux opérateurs de fusion adaptés à notre cadre de travail est une piste intéressante. La définition de tels opérateurs doit prendre en compte les besoins liés au domaine de la mesure et aux domaines de recherches attachés (archéologie, biologie).

Les domaines de recherche portent le deuxième axe envisagé pour des développements futurs. Après avoir mis en place avec succès un outil de gestion de relevés photogrammétriques sous-marins pour l'archéologie et la biologie, au-delà de la question de l'amélioration de cet outil se pose la question de la transversabilité avec d'autres domaines. Nous avons déjà commencé à appliquer notre outil au domaine de l'architecture médiévale [79]. Il est envisageable également d'adapter nos méthodes de gestion de relevés à d'autres moyens de mesures comme le laser.



# Bibliographie

- [1] Jean-Pierre Adam. *La construction romaine, Matériaux et techniques*. A. et J. Picard, 82, rue Bonaparte, 75006 Paris.
- [2] Alchourrón, Gärdenfors, and Makinson. On the logic of theory change : Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50(2) :510–530, 1985.
- [3] F. Baader and W. Nutt. Implementation and optimisation techniques. In Franz Baader, Diego Calvanese, Deborah McGuinness, Daniele Nardi, and Peter F. Patel-Schneider, editors, *The Description Logic Handbook : Theory, Implementation, and Applications*, chapter 2, pages 306–346. Cambridge University Press, 2003.
- [4] Franz Baader, Diego Calvanese, Deborah L. McGuinness, Daniele Nardi, and Peter F. Patel-Schneider, editors. *The Description Logic Handbook : Theory, Implementation, and Applications*. Cambridge University Press, 2003.
- [5] C. Baral, S. Kraus, J. Minker, and V. Subrahmanian. Combining knowledge bases consisting in first order theories. *Computational Intelligence*, 8(1) :45–71, 1992.
- [6] Chitta Baral, Sarit Kraus, and Jack Minker. Combining multiple knowledge bases. *IEEE Trans. Knowl. Data Eng.*, 3(2) :208–220, 1991.
- [7] Frederic Bartlett. *Remembering*. Cambridge. Cambridge University Press, 1932.
- [8] Georges F. Bass. *Archaeology under water*. Pelican book, Harmondsworth, 1970.
- [9] Georges F. Bass and Donald Rosencrantz. L'utilisation des submersibles pour les recherches et la cartographie photogrammétrique sous marine. In Unesco, editor, *L'archéologie subaquatique, une discipline naissante*, pages 285–298, Paris, 1973.
- [10] Ben-naim, S. Benferhat, O. Papini, and E. Wurbel. An answer set programming encoding of prioritized removed sets revision : application to gis. In J. Alferes and J. Leite eds. Springer Verlag, editors, *Lectures notes in Artificial Intelligence. Logics for AI. n. 3229.*, page 604–616, Lisbon Portugal, september 2004. JALIA'2004, Springer Verlag.
- [11] S. Benferhat, J. Ben-naim, R. Jeansoulin, M. Kelfallah, S. Lagrue, O. Papini, N. Wilson, and E. Wurbel. Revising geoinformation : the results of rev !gis. In Springer Verlag n 3771, editor, *the Eighth European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty*, page 452–464, Barcelone, july 2005. ECSQARU'05, Lecture Note in Artificial Intelligence.
- [12] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. Possibilistic Merging and Distance-based Fusion of Propositional Information. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 34((1-3)) :217–252, 2002.
- [13] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. Fusion d'informations incertaines en logique possibiliste : Classification des opérateurs et représentation de la fusion propositionnelle à base de distance. 1(1), jul 2003.
- [14] S. Benferhat, D. Dubois, S. Lagrue, and O. Papini. Making revision reversible : an approach based on polynomials. *Fundamenta Informaticae*, 53((3-4)) :251–288, 2002.
- [15] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. From semantic to syntactic approaches to information combination in possibilistic logic. In *Aggregation and Fusion of Imperfect Information*, pages 1449–1455, Physica Verlag, 1995.

- 
- [16] S. Benferhat, S. Konieczny, O. Papini, and R. Pino Perez. Iterated revision by epistemic states : axioms, semantics and syntax. In *Proceedings of the 14th European conference on Artificial Intelligence (ECAI 2000)*, pages 13–17, 2000.
  - [17] Salem Benferhat and Claudio Sossai. Reasoning with multiple-source information in a possibilistic logic framework. *Inf. Fusion*, 7(1) :80–96, 2006.
  - [18] M. Bouzeghoub, G. Gardarin, and E. Metais. Secsi : An expert system for database design. In *11th Very Large Data Base International Conference*, Stockholm, 1985. Morgan Kaufman.
  - [19] J. Brown. The problem of distorsion. *Close-range photogrammetry : STATE OF THE ART*, 1984.
  - [20] J. Lang C. Laffage. Logical representation of preferences for group decision making. In *7th International Conference on Krinciples of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 457–468, Breckenridge, CO, 2000.
  - [21] L. Cardelli and P. Wegner. On understanding types, data, abstraction and polymorphism. *ACM Computing Surveys*, 17(4), Decembre 1985.
  - [22] Michel Chien and Marie-Laure Mugnier. Conceptual graphs : Fundamental notions. *Revue d'intelligence artificielle*, 6 :365–406, 1992.
  - [23] L. Cholvy. Reasoning about merging information. *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainly Management Systems*, 3 :233–263, 1998.
  - [24] J. P. Delahaye. *Outils logiques pour l'intelligence artificielle*. Eyrolles, Paris, 1986.
  - [25] René Dinkel. *L'Encyclopédie du patrimoine (Monuments historiques, Patrimoine bâti et naturel - Protection, restauration, réglementation - Doctrines - Techniques - Pratiques)*. Les Encyclopédies du patrimoine.
  - [26] P. Drap and J. Garrabou. Rapport final sur le projet d'évaluation des ressources coralliennes du littoral algérien. Rapport, Etat algérien - CNRS, Octobre 2007.
  - [27] P. Drap, J. Seinturier, and P. Gamboggi. Mission in tuscanly : Data completed. Deliverable, European Information Society, projet VENUS, Juillet 2007.
  - [28] P. Drap, J. Seinturier, and L. Long. Archaeological 3d modelling using digital photogrammetry and expert system. the case study of etruscan amphorae. In *The Sixth International Conference on Computer Graphics and Artificial Intelligence*, pages 177–188, DIAZO1, Clermont Ferrand, 2003.
  - [29] Pierre Drap. *Photogrammétrie et modèles architecturaux*. PhD thesis, 1997.
  - [30] Pierre Drap and Pierre Grussenmeyer ang Gilles Gaillard. Simple photogrammetric methods with arpenteur. 3-d plotting and orthoimage generation : the i-image process. In ISPRS, editor, *CIPA 2001 International Symposium*, volume 1, pages 200–212, Postdam university, Germany, September 2001.
  - [31] Pierre Drap and Pierre Grussenmeyer. Arpenteur, an architectural photogrammetry network for education and research. In ISPRS, editor, *ISPRS Comm. V Symposium*, volume 12, pages 537–542, Int. Arch. of Photogrammetry and Remote Sensing, Hakodate, Japan, June 1998.
  - [32] Pierre Drap and Pierre Grussenmeyer. A digital photogrammetric workstation on the web. journal of photogrammetry and remote sensing. *Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 55(1), 2000. ISBN/ISSN 0924-2716.
  - [33] Pierre Drap, Pierre Grussenmeyer, and Jean Yves Blaise. A photogrammetric survey using knowledge representation on the arpenteur web-based photogrammetric workstation. In CIPA, editor, *XVII CIPA International Symposium*, volume 32, pages 1–15, Olinda, Brazil, January 1999.
  - [34] Pierre Drap and Luc Long. Toward a digital excavation data management system : The "grand ribaud d" etruscan deep-water wreck. In VAST, editor, *VAST2001, Virtual Reality, Archaeology, and Cultural Heritage*, volume 1, pages 1–12, Glyfada, Nr Athens, Greece, November 2001.
  - [35] H. Dressel. *Corpus inscriptionum latinarum. band*, 15, 1899.
  - [36] D. Dubois and H. Prade. *Possibility Theory : An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. Plenum Press, New York, 1988.

- [37] Didier Dubois, Jérôme Lang, and Henri Prade. Possibilistic logic. In Dov Gabbay, Christopher J. Hogger, and J. A. Robinson, editors, *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming, Volume 3 : Nonmonotonic Reasoning and Uncertain Reasoning*, pages 439–513. Oxford University Press, Oxford, 1994.
- [38] A. Thayse et co auteurs. *Approche logique de l'intelligence artificielle, Tome 1*. Informatique. DUNOD, Paris, 1990.
- [39] Paul Gochet et Pascal Gribomont. *Logique : méthodes pour l'informatique fondamentale*. Langue, Raisonnement, Calcul. Hermes, Paris, 1990.
- [40] P. Gamboggi. Tuscany photogrammetric and bathymetric sonar survey. Deliverable, European Information Society, projet VENUS, Janvier 2006.
- [41] Georges Gardarin. *Bases de données objet et relationnel*. Base de données. Eyrolles, 61, Bd Saint Germain, 75240 Paris Cedex 05, 1999.
- [42] Georges Gardarin. *Bases de données objet et relationnel*, chapitre Le modèle objet, page 355. Eyrolles, 1999.
- [43] Georges Gardarin. *Bases de données objet et relationnel*, chapitre Le modèle objet, page 356. Eyrolles, 1999.
- [44] Georges Gardarin. *Bases de données objet et relationnel*, chapitre Le modèle objet, page 357. Eyrolles, 1999.
- [45] Georges Gardarin. *Bases de données objet et relationnel*, chapitre Le modèle objet, page 359. Eyrolles, 1999.
- [46] Georges Gardarin. *Bases de données objet et relationnel*, chapitre Le modèle objet, page 366. Eyrolles, 1999.
- [47] René Ginouvès. *Dictionnaire méthodique de l'architecture grecque et romaine, tome I, Matériaux, techniques de construction, techniques et formes du décors*. Ecole française de Rome N°84, Diffusion de Broccard, 11 rue de Médicis 75006 PARIS, 1985.
- [48] René Ginouvès. *Dictionnaire méthodique de l'architecture grecque et romaine, tome II, Eléments constructifs : supports, couvertures, aménagements intérieurs*. Ecole française de Rome N°84, Diffusion de Broccard, 11 rue de Médicis 75006 PARIS, 1985.
- [49] M. Hammer and D. McLeod. Database description with sdm : A semantic database model. *ACM TODS*, 6(3), Septembre 1981.
- [50] Souhila Kaci. *Connaissances et Préférences : Représentation et Fusion en Logique Possibiliste*. PhD thesis, 2002.
- [51] S. C. Kleene. *Logique mathématique*. Epistémologie. Jacques Gabay, Paris, 1987.
- [52] S. Konieczny, J. Lang, and Pierre Marquis. Distance-based merging : A general framework and some complexity results. In *Proceedings of the Eighth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'02)*, pages 97–108, 2002.
- [53] S. Konieczny and R. Pino Pérez. On the logic of merging. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98), Trento*, pages 488–498, 1998.
- [54] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Merging with integrity constraints. In *Fifth European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'99)*, pages 233–244, 1999.
- [55] J. Lang. *Handbook of defeasible Reasoning and Uncertainty Management System*, chapitre Possibilistic logic : Complexity and algorithms, pages 179–220. 2000.
- [56] J. Lin. Integration of weighted knowledge bases. *Artificial Intelligence*, 83 :363–378, 1996.
- [57] Jinxin Lin and Alberto O. Mendelzon. Merging databases under constraints. *International Journal of Cooperative Information Systems*, 7(1) :55–76, 1998.
- [58] M. Beltrán Lloris. *Las ánforas romanas en España*. CSIC, 2004.



- 
- [59] C. Lécuse and Ph. Richard. The o2 database programming language. In *15th Very Large Data Bases International Conference*, Stockolm, 1989. Morgan Kaufman.
  - [60] Marvin Minsky. A framework for representing knowledge. Technical report, Cambridge, MA, USA, 1974.
  - [61] Marvin Minsky. A framework for representing knowledge. In Winston P. H, editor, *The psychology of computer vision*, pages 211–277, New-York, 1975. McGraw-Hill.
  - [62] Jean Marie Pérouse De Montclos. *Architecture vocabulaire, principe d'analyse scientifique*. Imprimerie Nationale, 1972.
  - [63] A. Napoli. Une introduction aux logiques de descriptions. rr RR-3314, 1997.
  - [64] American Society of Photogrammetry. *Manual of Photogrammetry, fourth edition*. A.S.P. : 210 Little Falls St. Falls Church, Va 22046, 1980.
  - [65] O. Papini. A complete revision function in propositional calculus. In B. Neumann, editor, *Proceedings of ECAI92*, pages 339–343, Austria, 1992. John Wiley and Sons. Ltd.
  - [66] O. Papini. Iterated revision operations stemming from the history of an agent's observations. In *workshop NMR98 on belief revision. KR'98*, 1998.
  - [67] O. Papini. Iterated revision operations stemming from the history of an agent's observations (extended version). In M. A. Williams and H. Rott, editors, *Frontiers of Belief revision*, pages 279–301. Kluwer Academic Press, 2001.
  - [68] O. Papini, E. Wurbel, R. Jeansoulin, P. Drap, M. Serayet, J. Seinturier, and J. Hue. Archeological ontologies and knowled based photogrammetric software interface 1. Deliverable, European Information Society, projet VENUS, Juillet 2007.
  - [69] J. Pearl. System Z : a natural ordering of default with tractable applications to default reasoning. In *Proc. of the 3rd Conf. on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge (TARK'90)*, volume 2, pages 121–135. Morgan Kaufmann, 2003.
  - [70] Jean-Marie Peséz. *L'Archéologie*. Armend Colin.
  - [71] F. Py and M. Py. Les amphores étrusques de vaunage et de villevieille, gard. *Mélanges de l'Ecole Française de Rome, Antiquité*, 86 :141–254, 1974.
  - [72] Ross Quillian. The teachable language comprehend : a simulation program and theory of language. In ACM, editor, *Communication of the ACM*, pages 459–476, 1969.
  - [73] P. Z. Revesz. On the semantics of theory change : arbitration between old and new information. *12<sup>th</sup> ACM SIGACT-SGMIT-SIGART symposium on Principles of Databases*, pages 71–92, 1993.
  - [74] P. Z. Revesz. On the semantics of arbitration. *Journal of Algebra and Computation*, 7(2) :133–160, 1997.
  - [75] Benferhat S., Dubois D., Prade H., and Williams M. A practical approach to fusing and revising prioritized belief bases. *Proceeding of EPIA 99*, LNAI 1695 :222–236, 1999.
  - [76] Konieczny S. and Pino Pérez R. Propositionnal belief base merging or how to merge belief/goals coming from several sources and some links with social choice theory. *European Journal of Operational Research*, 160(3) :785–802, 2005.
  - [77] M. Schmidt-Schauss and G. Smolka. Attributive concept descriptions with complements. *Artificial Intelligence*, 48 :1–26, 1991.
  - [78] J. Seinturier, P. Drap, and O. Papini. Fusion réversible : application à l'information l'archéologique. *JNMR*, 2003.
  - [79] J. Seinturier, P. Drap, O. Papini, O. Vannini, and M. Nuccioti. A merging data tool for knowledge based photogrammetry : the case study of the castle of shawbak , jordan. In *Proceedings of the XX INternational Symposium CIPA 2005*, Torino, september 2005.
  - [80] J. Seinturier, O. Papini, and P. Drap. A reversible framework bases merging. In J. Dix eds. T. Hunter, editor, *Proceedings of the 11th workshop on Non Monotonic Reasoning (NMR-06)*, pages p 490–496, Windermere, England, june 2006.
  - [81] St. Shapiro. *Encyclopedia of Artificial Intelligence Vol.1, second edition*. Wiley, 1992. REF 2 13,1 1.Ex.

- [82] John F. Sowa. *Conceptual Structures : Information Processing in Mind and Machine*. Addison-Wesley, 1984.
- [83] E. García Vargas. *La producción de ánforas en la Bahía de Cádiz en época romana (siglos II a.C. – IV d.C.)*. Ecija, Gráficas Sol, 1998.
- [84] Mary-Anne Williams. Iterated theory base change : A computational model. In *IJCAI*, pages 1541–1549, 1995.
- [85] E. Wurbel, O. Papini, and R. Jeansoulin. Revision : an application in the framework of gis. In *7th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning, KR'2000.*, pages 505–516.
- [86] L. A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets Syst.*, 100(supp.) :9–34, 1999.